(41) (10 cvičení)

Hledejme řešení úlohy

$$\Delta u = 0 \quad \text{na } B_b(0) \setminus \overline{B_a(0)} = \Omega$$
$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega$$

Potom máme v polárních souřadnicích

$$\partial_{rr} v + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad v(r,\varphi) = u(x,y)$$
$$v(b,\varphi) = g_1(\varphi)$$
$$v(a,\varphi) = g_2(\varphi)$$

Hledejme řešení ve tvaru separovaných proměnných tedy

$$v(r,\varphi) = R(\varphi)\Phi(\varphi).$$

Pak máme

$$\left(R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)\right)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}\Phi''(\varphi)R(r) = 0$$

tedy
$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

Nakonec tedy
$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda$$

a z geometrie víme
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$
$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

Tedy $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ + periodické okrajové podmínky

a) $\lambda < 0$ exponenciála není periodická

b) $\lambda = 0$ $\quad \Phi''(\varphi) = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = C_0$ (konstantní fce, nám do $R(r)$) / jiné budou

c) $\lambda > 0$
$$\Phi(\varphi) = A\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + B\cos(\sqrt{\lambda}\varphi)$$

2π-periodické řešení lze pokud, až $\sqrt{\lambda} = k \in \mathbb{N}$ (zapíšeme a schováme do konstant)

Tedy
$$\lambda_k = k^2 \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

máme řešení
$$\Phi_k(\varphi) = \begin{cases} A_0\cos\varphi & k = 0 \\ A_k\sin(k\varphi) + B_k\cos(k\varphi) & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Podívejme se na druhou rovnici

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - k^2 R(r) = 0$$

Řešení nejdříve hledejme ve tvaru

$$R_k(r) = r^\alpha$$
$$(\alpha(\alpha-1) + \alpha - k^2)r^\alpha = 0$$

4-2

Proto

$\alpha^2 - k^2 = 0$

Je-li $k>0 \Rightarrow$ $\alpha_1 = k$ $\alpha_2 = -k$

$k=0$ $\Rightarrow \alpha_1 = 0$ druhé řešení je pak dle lemmatu pro Eulerovu rovnici $\ln r$

Máme řešení po dvou $k \in \mathbb{N}_0$

$R_0 \Phi_0 = B_0^1 + B_0^2 \ln r$

$R_k \Phi_k = (A_k^1 \sin(k\varphi) + B_k^1 \cos(k\varphi)) r^k + (A_k^2 \sin(k\varphi) + B_k^2 \cos(k\varphi)) r^{-k}$ $k \in \mathbb{N}$

Zbývá jsme uspokojit okrajové podmínky. Je-li

$g_1 = c_k^1 \sin(k\varphi) + d_k^1 \cos(k\varphi)$ $k \in \mathbb{N}$

$g_2 = c_k^2 \sin(k\varphi) + d_k^2 \cos(k\varphi)$

dostáváme soustavu rovnic

$b^k (A_k^1 \sin k\varphi + B_k^1 \cos(k\varphi)) + b^{-k} (A_k^2 \sin(k\varphi) + A_k^2 \cos(k\varphi)) =$

$= c_k^1 \sin(k\varphi) + d_k^1 \cos(k\varphi)$

$a^k (A_k^1 \sin(k\varphi) + B_k^1 \cos(k\varphi)) + a^{-k} (A_k^2 \sin(k\varphi) + B_k^2 \cos(k\varphi))$

$= c_k^2 \sin(k\varphi) + d_k^2 \cos(k\varphi)$

Dostáváme soustavy rovnic

~~$b^k (A_k^1 + B_k^1)$~~ $b^k A_k^1 + b^{-k} A_k^2 = c_k^1$ $/ b^{-k}$

$a^k A_k^1 + a^{-k} A_k^2 = c_k^2$ $/ a^{-k}$

(soustava je regulární). Máme

$A_k^2 (b^{-2k} - a^{-2k}) = b^{-k} c_k^1 - a^{-k} c_k^2$

$A_k^2 = \dfrac{b^{-k} c_k^1 - a^{-k} c_k^2}{b^{-2k} - a^{-2k}} = \dfrac{a^{2k} b^k c_k^1 - a^k b^{2k} c_k^2}{a^{2k} - b^{2k}}$

$= \underline{\dfrac{a^k b^k}{b^{2k} - a^{2k}} \cdot (b^k c_k^2 - a^k c_k^1)}$

Analogicky $A_k^1 = c_k^1 b^{-k} - b^{-2k} A_k^2 = c_k^1 b^{-k} \left[1 + \dfrac{a^k b^k}{b^{2k} - a^{2k}} \cdot \dfrac{a^k}{b^k}\right] - \dfrac{a^k b^k}{b^{2k} - a^{2k}} \dfrac{c_k^2}{b^{2k}} b^k$

$= \underline{\dfrac{b^k}{b^{2k} - a^{2k}} c_k^1 - \dfrac{a^k c_k^2}{b^{2k} - a^{2k}}}$

Analogicky

$B_k^1 = \dfrac{b^k}{b^{2k} - a^{2k}} d_k^1 - \dfrac{a^k d_k^2}{b^{2k} - a^{2k}}$

$B_k^2 = \dfrac{a^k b^k}{b^{2k} - a^{2k}} (b^k d_k^2 - a^k d_k^1)$

Případ

$k = 0$:

$B_0^1 + B_0^2 \ln b = d_0^1$

$B_0^1 + B_0^2 \ln a = d_0^2$

$$B_0^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right) = d_0^1 - d_0^2$$

$$B_0^2 = \frac{d_0^1 - d_0^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$B_0^1 = d_0^1 - B_0^2 \ln b = d_0^1 - \frac{d_0^1 - d_0^2}{\ln b - \ln a} \cdot \ln b$$

$$= \frac{1}{\ln b - \ln a}\left(d_0^1(\ln b - \ln a - \ln b) + d_0^2 \ln b\right) = \boxed{\frac{d_0^2 \ln b - d_0^1 \ln a}{\ln \frac{b}{a}}}$$

Celotna rešitev

$$\boxed{\begin{aligned} u(r,\varphi) = {} & \frac{d_0^2 \ln b - d_0^1 \ln a}{\ln \frac{b}{a}} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[\frac{b^k c_k^1 - a^k c_k^2}{b^{2k} - a^{2k}} \sin(k\varphi) + \frac{b^k d_k^1 - a^k d_k^2}{b^{2k} - a^{2k}} \cos(k\varphi) \right] \\ & + \frac{d_0^1 - d_0^2}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} \left[\frac{a^k b^k}{b^{2k} - a^{2k}} (b^k c_k^2 - a^k c_k^1) \sin(k\varphi) \right. \\ & \left. + \frac{a^k b^k}{b^{2k} - a^{2k}} (b^k d_k^2 - a^k d_k^1) \cos(k\varphi) \right] \end{aligned}}$$

Poleg tega bodo vrste konvergentne, vidimo, da ker so g_1, g_2 omejeni, pri $a<r<b$ vrsta konvergira lokalno enakomerno

(Majorante prve vrste lahko ocenimo $C\left(\frac{r}{b}\right)^k (|c_k^1| + |c_k^2|)$, analogno ocene druge $C\left(\frac{a}{r}\right)^k (|c_k^1| + |c_k^2|)$)

Tudi odvodi, tako da $u \in C^2(\Delta_b(0) \setminus \overline{B_a(0)})$

Robne pogoje pa dobimo iz drugega poglavja, kjer pokažemo, da $\sum |c_k| + |d_k|$ konvergira, ko je $g \in AC[0,2\pi]$ in $g' \in L^2(0,2\pi)$.

Kaj se zgodi, ko $b \to \infty$ ali $a \to 0^+$? Tu ni enolične rešitve, ali zahtevamo pri $b\to\infty$ omejeno rešitev $\Rightarrow A_k^1, B_k^1 = 0$

$a \to 0+$ — " — $A_k^2, B_k^2 = 0$!

Podrobneje si poglejmo primer, ko $b \to \infty$. Rešitev je

$$u(r,\varphi) = B_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^2 \sin(k\varphi) + B_k^2 \cos(k\varphi)\right) r^{-k}$$

Tato řada se dá sečíst, což neuděláme (vyjde velmi ne mnoho)

Jen si spočítáme:

$$u(a,\varphi) = g(\varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \sin(k\varphi) + d_k \cos(k\varphi) \right)$$

Tedy
$$B_0^1 = b_0$$
$$A_k^2 \cdot a^{-k} = c_k$$
$$B_k^2 \, a^{-k} = d_k$$

a pak

$$\boxed{u(r,\varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^2 \sin k\varphi + B_k^2 \cos(k\varphi) \right) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^k}$$

Analogický je postup i pro úlohu na výseči (v mojich zápisech, ale ne musíme)

Příklad:

$\Delta u = 0$ na $0 < r < a$ $\quad 0 < \varphi < \alpha < 2\pi$

$u(a,\varphi) = g(\varphi)$ $\quad \varphi(0) = g(\alpha)$

$u(r,0) = u(r,\alpha) = 0$ $\quad 0 \le r \le a$

Řešme úlohu pro $g(\varphi) = \varphi \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right)$

Podobně dojdeme k pěti rovnicím

$u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

ale teď $\Phi'' + \lambda \Phi = 0$

$\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$

již víme, že tohle vede na řešení ($\lambda = \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2$ $k \in \mathbb{N}$)

$\Phi_k(\varphi) = \sin\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \cdot \varphi$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 R(r) = 0$$

$R(r) = r^{\alpha}$

$\alpha_{1/2} = \pm \frac{k\pi}{\alpha}$ ale $-\frac{k\pi}{\alpha}$ nevyhovuje kvůli nule $\Rightarrow$ NR

[illegible]

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right) r^{\frac{k\pi}{\alpha}}$$

$$u(a,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

$$\boxed{A_k = c_k \cdot a^{-\frac{k\pi}{\alpha}}}$$

$$c_k = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} \varphi \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi$$

1) $k=1$

$$c_1 = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} \varphi \, \frac{1-\cos\frac{2\pi}{\alpha}\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \left(\varphi - \varphi\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\varphi\right)\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\alpha - \frac{1}{\alpha}\Big[\underbrace{\varphi \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\alpha}\varphi\right)}{\frac{2\pi}{\alpha}}}_{=0}\Big]_0^{\alpha} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha} \sin\left(\frac{2\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos\frac{2\pi}{\alpha}\varphi}{\frac{2\pi}{\alpha}}\right]_0^{\alpha} = \boxed{\frac{1}{2}\alpha}$$

$$c_k = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} \varphi \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right)\sin\left(\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\right)}_{\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{(k+1)\pi}{\alpha}\varphi + \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{\alpha}\varphi\right)\right)} d\varphi = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\varphi\left[\cos\left(\frac{(k-1)}{\alpha}\pi\varphi\right) - \cos\left(\frac{(k+1)}{\alpha}\pi\varphi\right)\right] d\varphi$$

$$= \frac{2}{\alpha}\left(\Big[\underbrace{\varphi \cdot \frac{\sin\frac{(k-1)}{\alpha}\pi\varphi}{\frac{k-1}{\alpha}\pi}}_{=0}\Big]_0^{\alpha} - \Big[\underbrace{\varphi\,\frac{\sin\frac{(k+1)\pi\varphi}{\alpha}}{\frac{(k+1)\pi}{\alpha}}}_{=0}\Big]_0^{\alpha}\right)$$

$$+ \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\left(\frac{\sin\frac{(k-1)\pi\varphi}{\alpha}}{\frac{(k+1)\pi}{\alpha}} - \frac{\sin\frac{(k+1)\pi\varphi}{\alpha}}{\frac{(k-1)\pi}{\alpha}}\right) d\varphi$$

$$= \frac{2}{\alpha}\cdot\left[\frac{\alpha^2}{(k+1)^2\pi^2}\underbrace{\left[-\cos\frac{(k+1)\pi\varphi}{\alpha}\right]_0^{\alpha}}_{1-(-1)^{k+1}} - \frac{\alpha^2}{(k-1)^2\pi^2}\left[-\cos\frac{(k-1)\pi\varphi}{\alpha}\right]_0^{\alpha}\right)$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi^2}\left(1-(-1)^{k+1}\right)\left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k-1)^2}\right)$$

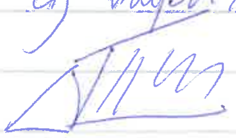
$$= \boxed{\frac{-8\alpha\left(1-(-1)^{k+1}\right)}{\pi^2}\,\frac{k}{(k^2-1)^2}}$$

$$\boxed{u(r,\varphi) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{8\alpha}{\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\left(1-(-1)^{k+1}\right)}{(k^2-1)^2}\sin\left(\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}}$$

[illegible] !

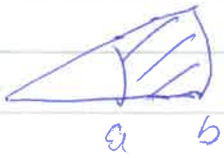
Delno mešanje faz

a) [illegible]



— [illegible]

b) [illegible]



— [illegible]