PDR

Primer 3

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = u^2 \quad \text{na } \mathbb{R}^2$$

Sledeč podatek $u(t_0,x) = u_0(x)$

Rešitev

Uvedimo homogeno enačbo

$$(*) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + b\frac{\partial w}{\partial x} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ali na katerem karakteristični sistem

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = b \qquad \frac{dz}{ds} = z^2$$

$$\frac{d}{ds}(x - bt) = 0 \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{z} + t\right) = 0$$

$$\psi_1(t,x,z) = x - bt$$

$$\psi_2(t,x,z) = \frac{1}{z} + t$$

Občna rešitev homogene enačbe (*) je potem

$$\psi(t,x,z) = F(\psi_1(t,x,z), \psi_2(t,x,z)) \quad (\text{dif. } F),$$

vzemimo $t = t_0$ in $z = u_0(x)$

$$\psi(t_0, x, u_0(x)) = 0$$

Tedaj iščemo $F(u,v)$ tak, da $F\left(x - bt_0, \frac{1}{u_0(x)} + t_0\right) = 0$

~~$F(u,v) = \ldots$~~

Tedaj $F(u,v) = \dfrac{1}{u_0(u + bt_0)} - v + t_0 = 0$

tedaj

$$\frac{1}{u_0(x - b(t-t_0))} - \frac{1}{z(t,x)} - t + t_0 = 0$$

$$z(t,x) = \frac{u_0(x - b(t-t_0))}{1 - (t-t_0)\,u_0(x - b(t-t_0))},$$

Ta rešitev je gladka in globalna (na $t \geq t_0$) je samo pogoj $u_0 \leq 0$. V nasprotnem primeru je samo na intervalu $[t_0, T_{max})$, $T_{max} = t_0 + \dfrac{1}{\sup_{y\in\mathbb{R}} u_0(y)}$.

Pr.
$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = -tu$$

$u(0,x) = \sin x$ ~~rešitev $x = \ldots$~~.

Tedaj imamo enačbo

$$(*) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + x\frac{\partial w}{\partial x} - tz\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Odgovarjajoč karakteristični sistem je

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = x \qquad \frac{dz}{ds} = -tz$$

Odtud máme

$$\frac{d}{dt}(t - \ln|x|) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}t^2 + \ln|z|\right) = 0$$

Tedy $\psi_1(t,x,z) = t - \ln|x|$

$\psi_2(t,x,z) = \frac{1}{2}t^2 - \ln|z|$

a dle předchozího, hledáme řešení

$F(\psi_1(t,x,z), \psi_2(t,x,z))$ (obecné řešení (*))

Kde F

$$F(\psi_1(0,x,\sin x), \psi_2(0,x,\sin x)) = 0$$

Tedy

$$F(-\ln|x|, 0 - \ln(|\sin x|)) = 0$$

Uvažujme na chvíli $x>0$, $\sin x > 0$ $\overset{z>0}{\Longrightarrow}$

$$F(-\ln x, -\ln(\sin x)) = 0$$

$$e^{-\ln(\sin x)} - \sin e^{(\ln x)} = 0$$

$$e^{-\ln \psi_2} - \sin e^{-\psi_1} = 0$$

$$e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot z - \sin e^{t-\ln x} = 0$$

$$\boxed{z = e^{\frac{1}{2}t^2} \sin(e^{-t}x)}$$ daná nyní na $\mathbb{R}^2$ ✓

Jiná varianta: Hledejme řešení charakteristické soustavy

$t(s) = s + C_1$

$x(s) = C_2 e^s$

$z'(s) = -(s+C_1)\cdot z(s) \Rightarrow \ln(z(s)) = -\frac{1}{2}s^2 - C_1 s + C_2$

$z(s) = K_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}s^2 - C_1 s}$

Fixujme t_0, x_0, z_0 : Ona, aby to byla počáteční charakteristika v $s=0$

$C_1 = t_0 \quad C_2 = x_0 \quad K_2 = z_0$

Kdy je $t(s) = 0$? $\Rightarrow$ pro $s = -t_0$

Tedy $x(t_0) = x_0 e^{-t_0}$

$z(t_0) = z_0\, e^{-\frac{1}{2}t_0^2 + t_0\cdot t_0} = z_0 e^{\frac{1}{2}t_0^2}$

Tedy splňuje počáteční podmínku dle (4)

$0 = w(0,x,z) = z - \sin x$

$0 = w(t,x,z) = z(t) - \sin(x(t)) = z e^{\frac{1}{2}t^2} - \sin(x e^{-t})$

$\Downarrow$

řešení je $\underline{u(t,x) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \sin(x e^{-t})}$

Příklad

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = y$$

$$u(x,0) = x^2$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + y\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{dx}{ds} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}(\ln|x| - y) = 0$$

$$\frac{dy}{ds} = 1 \qquad \frac{d}{ds}\left(\tfrac{1}{2}y^2 - z\right) = 0$$

$$\frac{dz}{ds} = y$$

$$\Psi(x,y,z) = F(\underbrace{\ln|x| - y}_{\Psi_1}, \underbrace{\tfrac{1}{2}y^2 - z}_{\Psi_2})$$

$$0 = \Psi(x,0,x^2) = F(\ln|x|, -x^2) = (e^{\Psi_1})^2 + \Psi_2$$

$$0 = (e^{\ln|x| - y})^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - z$$

$$0 = x^2 e^{-2y} + \tfrac{1}{2}y^2 - z$$

$$\boxed{u(x,y) = x^2 e^{-2y} + \tfrac{1}{2}y^2}$$

Příklad:
$$2\frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial u}{\partial y} + 6u = 0 \qquad u(x,0) = x\cos x$$

$$2\frac{\partial w}{\partial x} + 5\frac{\partial w}{\partial y} - 6z\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2 \qquad \frac{d}{ds}(5x - 2y) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = -6z \qquad \frac{d}{ds}(3x + \ln|z|) = 0$$

$$\Psi(x,y,z) = F(5x - 2y, 3x + \ln|z|)$$

$$0 = \Psi(x, 0, x\cos x)$$

$$0 = F(5x, 3x + \ln|x\cos x|)$$

$$0 = 3\Psi_1 - 5\Psi_2 + 5\ln\left(\left(\tfrac{\Psi_1}{5}\right)\cos\tfrac{\Psi_1}{5}\right)$$

Tedy

$$0 = \cancel{15x} - 6y - \cancel{15x} - 5\ln|z| + 5\ln\left(\left(x - \tfrac{2}{5}y\right)\cos\left(x - \tfrac{2}{5}y\right)\right)$$

$$\boxed{e^{-\frac{6}{5}y}\cdot\left(x - \tfrac{2}{5}y\right)\cos\left(\left(x - \tfrac{2}{5}\right)y\right) = z}$$

Příklad Odvoďte, že neexistuje řešení úlohy

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} + 8u = 0 \qquad u(x, \tfrac{3x-1}{2}) = e^x$$

Postup

$$2\frac{\partial w}{\partial x} + 3\frac{\partial w}{\partial y} + 8z\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 2 \\ \frac{dy}{ds} &= 3 \\ \frac{dz}{ds} &= -8z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\frac{d}{ds}(3x-2y) = 0 \\ &\frac{d}{ds}(4x + \ln|z|) = 0 \end{aligned}$$

$$w(x,y,z) = F(3x-2y,\ 4x+\ln|z|)$$

Vyjádření pro w úloh. je

$$0 = F(3x-2(\tfrac{3x-1}{2}),\ 4x+\ln e^x) = $$
$$= F(1, 5x)$$

To je ale možné jen při podmínce, že $F \equiv 0$ — tedy řešení naší úlohy neexistuje!

(Problém je, že data jsou zadána na přímce $(x, y = \frac{3x-1}{2})$ a podél ní je charakteristika konstantní, tedy na ní nelze zadat podmínku!)

Příklad Pokud hledáme obecné řešení této úlohy, pak lze vyjádřit pro u vztah

$$0 = F(3x-2y,\ 4x+\ln z(x,y))$$

$$\Rightarrow\ z(x,y) = C\cdot e^{-4x} \quad \text{přičemž} \quad 3x-2y = \text{const}$$

$$\boxed{u(x,y) = \varphi(3x-2y)\, e^{-4x}} \qquad \varphi:\ C^1\text{-funkce.}$$

Uvažujme nyní Burgersovu rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(0,x) = u_0(x)$$

Lze ji psát ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 0$$

Jestliže $\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus B_R} |u| \, dx = 0$ a u je omezená, pak pro $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$

— máme

$$\underline{\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx,}$$

PDR cvičení

Pravidla u:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)\, dx$$

a analogicky $\forall p>1$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |u|^{p-2} u \cdot u\, dx = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u|^p(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0|^p dx$$

limita $p\to\infty$,

$$\boxed{\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$$

~~Oprava chyby~~ x - konst!

Charakteristický systém

$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad t(0)=t_0$

$\frac{dx}{ds} = u(t(s), x(s)) \qquad x(0)=x_0$

$\boxed{\frac{dz}{ds} = 0}$

Ale současně platí

$$\frac{d}{ds} u(s+t_0, x(s)) = \frac{\partial u}{\partial t}(\,) + \frac{\partial u}{\partial x}(\,)\cdot\frac{dx}{ds} = 0\,!$$

Tedy $u(s+t_0, x(s)) =$ konst podél charakteristik [upravit ve skriptech]!! 8.0.5 h

$\boxed{\text{Pozor}}$ $\quad u(t, x+t\,u_0(x)) = u_0(x)$

Dk

Protože je $u(t(s), x(s)) =$ konst $\Rightarrow \quad t(s) = s+t_0$

$x(s) = Cs + x_0$

$C = u(t(s), x(s)) =$ const. ~~Proto~~

Ale když $C = u(t(s), x(s))\big|_{s=-t_0} = u(0, x_0 - Ct_0) = u_0(x_0 - Ct_0)$

Ale platí $y_0 = x_0 - Ct_0$

$u(t(s), x(s))\big|_{s=0} = u(t_0, x_0) = u(t_0, y_0 + Ct_0) = C = u_0(y_0)$

$x := y_0 \quad t := t_0 \quad C = u_0(x)$

Je-li u_0 neklesající na $\mathbb{R}$, pak pro $x_1 < x_2$ je $u_0(x_1) \le u_0(x_2) \Rightarrow$ polopřímky $x(s) = s\,u_0(x_0) + x_0$, $s\ge 0$ se nikde neprotínají

Je-li ale pro nějaké $x_1 < x_2$ $u_0(x_1) > u_0(x_2)$, pak v nějakém čase t_{crit} pole – klasické řešení přestává existovat

Proto musíme zavést jiné řešení – tzv. slabé řešení

Vezmeme $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ a násobíme původní rovnici, integrujeme přes $(0,\infty)\times\mathbb{R}$

Pak

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\varphi + u\frac{\partial u}{\partial x}\varphi\right) dx\,dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2)\varphi\,)\, dx\,dt$$