Cvičení 5

20

1) Odvoďte klas. řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + cu = f \quad \text{na } (0,T)\times\mathbb{R}^N$$
$$u = g \quad \text{na } \{0\}\times\mathbb{R}^N$$

Řešení:

Řešme

Víme-li, že z řeší $\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = 0$, potom

$u(t,x) := e^{-ct}\cdot z(t,x)$ řeší

$$\frac{\partial}{\partial t}(u) - \Delta u = -c\cdot u \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + cu = 0}$$

Proto očekáváme, že klas. řešení bude pro

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + cu = 0 \\ u = g\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&(0,T)\times\mathbb{R}^N \\ &\text{na } \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

$$\boxed{u(t,x) = \frac{e^{-ct}}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy}$$

Důkaz a důkaz dojmu jako na řešení vedení tepla, jediná změna

$$|u(t,x) - g(x_0)| \le \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\left(e^{-ct}g(y) - g(x_0)e^{-ct}\right)\right)dy\right| \quad \text{neboť } \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy = 1!$$
$$+ \left|g(x_0)\left(1 - e^{-ct}\right)\right|$$

Ten dojem argument jako v RVT je přesně malý pro $x\to x_0$, $t\to 0^+$ a druhý je malý pro $t\to 0^+$ ~~...~~ – přímo.

Pokud použijeme Duhamelův princip, dostaneme jako v RVT

$$\boxed{u_2(t,x) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}}\, e^{-c(t-s)}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(s,y)\,dy\,ds}$$

Omezení pro hladké f je přesně stejné jako v RVT.

(2) Nechť u je řešení rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ na $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.

a) Ukažte, že $u_\lambda(t,x) := u(\lambda^2 t, \lambda x)$ řeší $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ stejnou RVT

b) Ukažte, že $v(t,x) := x\cdot Du(t,x) + 2t\,\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ také řeší RVT

Ř.

a) Použijme

$$\partial_t u_\lambda(t,x) = \partial_t\left(u(\lambda^2 t, \lambda x)\right) = \partial_\tau u(\lambda^2 t, \lambda x)\cdot \lambda^2$$

$$\partial_{x_i} u_\lambda(t,x) = \partial_{x_i}\left(u(\lambda^2 t, \lambda x)\right) = \partial_{y_i} u(\lambda^2 t, \lambda x)\cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \partial_t u_\lambda - \Delta u_\lambda = (\partial_\tau - \Delta_y)\, u(\lambda^2 t, \lambda x)\cdot \cancel{\lambda^2} = 0$$

b) Všimněte si, že $v(t,x) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(u_\lambda(t,x)\right)\Big|_{\lambda=1}$

Pak $0 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left((\partial_\tau - \Delta_y)\, u_\lambda(t,x)\right)\Big|_{\lambda=1} = (\partial_\tau - \Delta_y)\,\frac{\partial u_\lambda(t,x)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=1}$ Q.E.D.

(3)
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{na } (0,\infty)\times(0,\infty)$$
$$u(t,0) = 0 \quad t>0$$
$$u(0,x) = U_0 = \text{const}$$

Prodloužení liché podle počátku

$$u(t,x) = \frac{-U_0}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy + \frac{U_0}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy$$

$$= -\frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4t}}}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz + \frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2}\,dz$$

$$= +\frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-z^2}\,dz + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} + \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2}\,dz\right]$$

$$= \boxed{\frac{2U_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2}\,dz}$$