Cvičenje 6

1) Reši nalogo

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{na } (0,\infty)\times(0,1)$$
$$u(0,x) = x(x-1)$$
$$u(t,0) = u(t,1) = 0$$

Rešitev:

Uvedemo rešitev nastavek
$$u(t,x) = X(x)\,T(t)$$
in vstavimo v enačbo
$$T'(t)\,X(x) + X''(x)\,T(t) = 0$$
Predpostavljamo, da rešitev je neničelna, tako da lahko na obeh straneh delimo [illegible]
$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$
LS - odvisna je od t, DS - od x $\Rightarrow$ LS = DS = const

a konstanto označimo
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \qquad \lambda\in\mathbb{R} \qquad \text{na } (0,1)$$
a pripadajoča robna pogoja
$$X(0) = X(1) = 0$$
Potem
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = X(1) = 0$$

a) $\lambda < 0$
$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}$$
$X(0)=0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$

$X(1)=0 \Rightarrow C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}} = 0$

Matrika je regularna $\Rightarrow$ neničelnih [illegible] rešitev

b) $\lambda = 0$
$$X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B \qquad X(0)=0 \Rightarrow B=0$$
$$X(1)=0 \Rightarrow A = 0 \qquad \Rightarrow$$

c) $\lambda > 0$

$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$

$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$X(1) = 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{N}$ (? lahko $n<0$ ampak bi to mogoče)

$\Rightarrow X_n(x) = C_n \sin(n\pi x)$

Potem $\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = -\lambda_n = -(n\pi)^2$

$T_n'(t) + (n\pi)^2 T_n(t) = 0$

$T_n(t) = T_n(0)\, e^{-n^2\pi^2 t}$

Določimo $T_n(0)$! Je-li $u_0(x) = A_n \sin(n\pi x)$

$\Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-n^2\pi^2 t}$

$u(t,x) = A_n \sin(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}$

Je-li $u_0(x) = \sum_{n=1}^{m} A_n \sin(n\pi x)$

$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{n=1}^{m} A_n \sin(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}$

Odprto: Ko kadar $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$?

Formalno pak

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}$$

Odprto: Je to ovrednotiti rešitev naše enačbe ?

Tj. a) ko konvergira dana vrsta + ko je lahko odvajati členoma dolg po x in po t

Opomba: je-li $|A_n| \leq n^q \quad q \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow u \in C^\infty((0,\infty) \times [0,1])$

(majorantna vrsta $n^{q+|\alpha|} e^{-n^2\pi^2\delta}$ $t \geq \delta > 0$)

Tedaj odprto: ko bo $u \in C([0,\infty) \times [0,1])$, natančno, ko bo konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$?

ali $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$?

Recimo, da velja $u_0 \in AC(\mathbb{R})$ — u_0'

$u_0 \in AC([0,1])$ in $f' \in L^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ konvergira

(ideja: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|A_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum n^2 A_n^2\right)$ $\quad a|A_n| = C \frac{1}{n} |\hat{A}_n|$) koeficient u_0'

To tedy nemusí, ať platí $u_0 \in C([0,1])$, $u_0(0)=u_0(1)$ (+ další podmínky!!) a $u_0' \in L^2(0,1) \Rightarrow$ dostaneme klasické řešení naší úlohy?

Vezmeme $u_0(t) = x(1-x)$ — to splňuje dané podmínky. Pak

$$A_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} [x(1-x)]_l \sin(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 \underbrace{x(1-x)}_{u}\,\underbrace{\sin(n\pi x)}_{v'}\,dx$$

$$= 2\underbrace{\left[x(1-x)\cdot\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} + 2\int_0^1 \underbrace{(1-2x)}_{u}\,\underbrace{\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}}_{v'}\,dx =$$

$$= 2\left[(1-2x)\cdot\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (-2)\cdot\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\,dx$$

$$= \frac{4}{(n\pi)^3}\left[-\cos(n\pi x)\right]_0^1 = \frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}$$

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(n\pi x)\,e^{-n^2\pi^2 t} = \underline{\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin((2k-1)\pi x)\,e^{-(2k-1)^2\pi^2 t}}$$

Řada vždy konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}_0^+\times[0,1]$ a je tedy C^∞ na $\mathbb{R}^+\times[0,1] \Rightarrow$ splňuje i rovnici.

Analogickou úvahu lze provést i pro další okrajové úlohy — nebudeme je tedy dělat (dobrovolně DÚ).

Příklad: Hledejme řešení úlohy

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0$$
$$u(0,x) = \sin^2(2\pi x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$$

Řešení:

Analogický postup $\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X'(0) = X'(1) = 0$$

a) $\lambda < 0$ — opět není řešení

$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{|\lambda|}x} + C_2 e^{\sqrt{|\lambda|}x}$, derivace potom dá $C_1=C_2=0$

b) $\lambda = 0$

$X''(x) = 0$ $\quad X'(0) = X'(1) = 0 \Rightarrow \underline{X = 1}$

c) $\lambda > 0$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$ $\quad X'(0) = X'(1) = 0$

Tedy $X_n(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$ ____ $X_n'(0) = 0$

$\Rightarrow C_2 = 0$

$X'(1) = 0 \quad \sqrt{\lambda} = n\pi$

$X_n(x) = \cos(n\pi x)$

$$T_n'(t) + n^2\pi^2 a^2 T_n(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_n(t) = B_n e^{-n^2\pi^2 a^2 t}$$
$$T_n(0) = B_n$$

– opět opakuj $1, n, \infty$:

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 a^2 t} \cos(n\pi x)}$$

$$u_0(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\pi x)$$

$$B_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \sin^2(2\pi x)\, dx = 2\int_0^1 \frac{1-\cos 4\pi x}{2} dx = \underline{1}$$

$$B_n = 2\int_0^1 \frac{1-\cos 4\pi x}{2} \cdot \cos(n\pi x)\, dx = \int_0^1 (\cos n\pi x - \cos(n\pi x)\cos(4\pi x))dx$$

$\int_0^1 \cos n\pi x\, dx$

$$= 0 - \begin{cases} 0 & n \neq 4 \\ -\int_0^1 \frac{1+\cos 8\pi x}{2} dx = -\frac{1}{2} & \underline{n=4} \end{cases}$$

(Rychlejší vidíme, že $\frac{1-\cos 4\pi x}{2}$ má rozvoj přímo hned!)

Celkem tedy

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-16\pi^2 a^2 t} \cos(4\pi x)}$$

Příklad: $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ na $(0,\infty) \times (0,1)$

$u(0,x) = 1 + \sin^2(2x\pi)$

$u(t,0) = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$

Řešení

Nejprve se zbavíme nehomogenní podmínky:

$u(t,x) = 1 + v(t,x)$

Pak $\partial_t v - \partial_{xx} v = 0$ na $(0,\infty)\times(0,1)$

$u(t,0) = \sin^2(2\pi x)$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$ $\qquad u(t,0) = 0$

Iščemo rešitve podane oblike

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$

$X(0) = 0 \qquad X'(1) = 0$

a) $\lambda < 0$ ni netrivialnih rešitev

b) $\lambda = 0$

$X = Ax + B \qquad X \equiv 0$

c) $\lambda > 0$

$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$

$C_2 = 0$

$\cos(\sqrt{\lambda} x) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad n \in \mathbb{N}$

$X_n(x) = \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2} x\right)$

$T_n(t) = A_n e^{-((2n-1)\frac{\pi}{2})^2 t} \qquad A_n = T_n(0)$

u_0 bo razširjena 4-periodična funkcija, liha okoli 0, soda okoli $x=1$

Potem $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-((2n-1)\frac{\pi}{2})^2 t} \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2} x\right)$

$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2} x\right)$

$$A_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} (\sin^2(2\pi x))_e \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2} x\right) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \sin^2(2\pi x) \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2} x\right) dx = 2 \int_0^1 \frac{1 - \cos 4\pi x}{2} \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2} x\right) dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2} x\right) dx}_{} - \int_0^1 \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2} x\right) \cos(4\pi x)\, dx$$

$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left(\sin(A+B) + \sin(A-B)\right)$

$$-\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2} x\right)\right]_0^1 = \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin\left[\left((2n-1)\frac{\pi}{2} + 4\pi\right)x\right] + \sin\left[\left((2n-1)\frac{\pi}{2} - 4\pi\right)x\right]\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin\left((2n+7)\frac{\pi}{2} x\right) + \sin\left((2n-9)\frac{\pi}{2} x\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(2n+7)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{(2n-9)\frac{\pi}{2}}$$

Allora $A_n = \frac{2}{\pi(2n-1)} - \frac{1}{\pi(2n+7)} - \frac{1}{\pi(2n-9)}$ $\left(\sim \frac{1}{n^2}\right)$

$$\underbrace{u(t,x) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2n+7} - \frac{1}{2n-9} \right) e^{-\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)x\right)}$$