$$= \frac{1}{3} - \underbrace{\left[r^2 \frac{\sin 2\pi r}{2\pi}\right]_0^1}_{=0} + \frac{2}{2\pi}\int_0^1 r \sin(2\pi r)\,dr = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi}\left[-r\frac{\cos 2\pi r}{2\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi^2}\underbrace{\int_0^1 \cos(2\pi r)\,dr}_{=0}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}$$

$k>1$

$$2\int_0^1 r^2 \underbrace{\sin(\pi r)\sin(k\pi r)}_{-\frac{1}{2}(\cos((k+1)\pi r) - \cos((k-1)\pi r))}\,dr = \int_0^1 r^2\cos((k-1)\pi r)\,dr - \int_0^1 r^2 \cos((k+1)\pi r)\,dr$$

$$= \underbrace{\left[r^2 \frac{\sin((k-1)\pi r)}{(k-1)\pi}\right]_0^1}_{0} - \underbrace{\left[r^2 \frac{\sin((k+1)\pi r)}{(k+1)\pi}\right]_0^1}_{0} - \frac{2}{(k-1)\pi}\int_0^1 r\sin((k-1)\pi r)\,dr + \frac{2}{(k+1)\pi}\int_0^1 r\sin((k+1)\pi r)\,dr$$

$$= -\frac{2}{(k-1)\pi}\left[r \cdot -\frac{\cos((k-1)\pi r)}{(k-1)\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{(k+1)\pi}\left[r\frac{\cos((k+1)\pi r)}{(k+1)\pi}\right]_0^1 + 0$$

$$= \frac{2}{(k-1)^2\pi^2}(-1)^{k-1} - \frac{2}{(k+1)^2\pi^2}(-1)^{k-1} = \frac{k^2+2k+1-k^2+2k-1}{(k^2-1)^2\pi^2}\cdot 2(-1)^{k-1}$$

$$= \frac{8k(-1)^{k-1}}{(k^2-1)^2\pi^2}$$

Czyli
$$u(t,x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k-1}}{(k^2-1)^2\pi}\cdot\frac{\sin(k\pi|x|)}{|x|}e^{-(k\pi)^2 t} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right)\frac{\sin(\pi|x|)}{|x|}e^{-\pi^2 t}$$

(w 0 .. O.K. — do dodefiniowania)

Ćwiczenie 0.8

(1) Rozwiąż równanie

$\partial_t u - \Delta u = 0$ na $(0,\infty)\times\mathbb{R}^3$

$u(0,x) = e^{-a|x|^2}$

$\partial_t u(0,x) = 0$

Znajdź $u(t,0)$ i $\lim_t u(t,0)$

Rozw.

Niech $u(t,x) = v(t,r)$, $r = |x|$. $/\cdot r$

$\partial_t v - \left(\partial_{rr} v + \frac{2}{r}\partial_r v\right) = 0 \quad /\cdot r$

$\partial_t(rv) - \partial_{rr}(rv) = 0 \qquad w := rv$

$\partial_t w - \partial_{rr} w = 0$

$w(0,r) = re^{-a|r|^2}$, $w(0,r)$ na $(0,\infty)\times(0,\infty)$

$\partial_t w(0,r) = 0$ na $(0,\infty)$

Pomocí toho určit pro vlnu v jednom prostoru dimenze

$w(t,r) = \frac{1}{2}\left((r+t)e^{-a(r+t)^2} + (r-t)e^{-a(r-t)^2}\right)$

$v(t,r) = \frac{1}{2r}\left((r+t)e^{-a(r+t)^2} + (r-t)e^{-a(r-t)^2}\right)$

l'Hospital

$v(t,0) = \lim_{r\to 0} v(t,r) = \frac{1}{2}\left[e^{-a(r+t)^2} - 2a(r+t)^2 e^{-a(r+t)^2} + e^{-a(r-t)^2} - 2a(r-t)^2 e^{-a(r-t)^2}\right]\Big|_{r=0}$

$= \frac{1}{2}\left(e^{-at^2} - 2at^2 e^{-at^2} + e^{-at^2} - 2at^2 e^{-at^2}\right)$

$= (1-2at^2)e^{-at^2}$

Počítám minimum $(1-2at^2)e^{-at^2}$, $t\in[0,\infty)$

$\lim_{t\to\infty}(\ ) = 0 \qquad (\ )|_{t=0} = 1$

$\frac{d}{dt}\left((1-2at^2)e^{-at^2}\right) = -4at e^{-at^2} - (1-2at^2)2at e^{-at^2} = 0$

$-2 = 1-2at^2$

$at^2 = \frac{3}{2}$

$\min_{t\in[0,\infty)} = -2e^{-\frac{3}{2}} < 0$

příklad dole pro hledání ⇒ neplatí princip minima (obdobně pro maxima).

Příklad

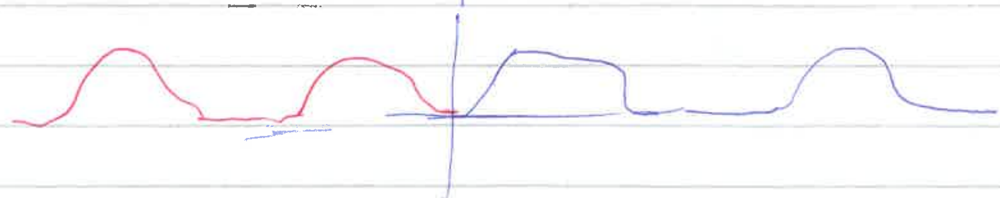
Uvažujme úlohu na $(0,\infty)\times(0,\infty)$

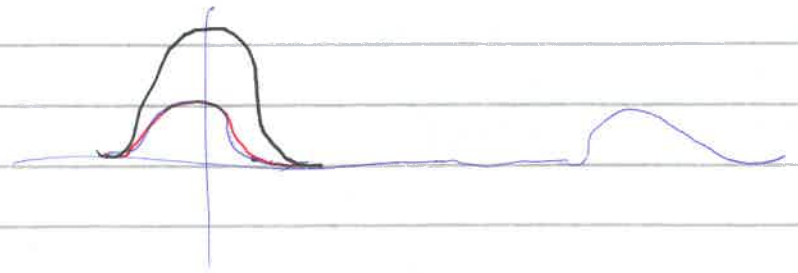
$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0$

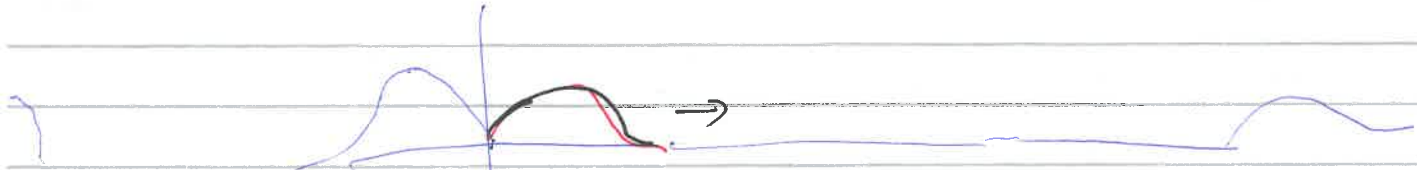
$u(0,x) = u_0(x)$

$\partial_t u(0,x) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = 0$

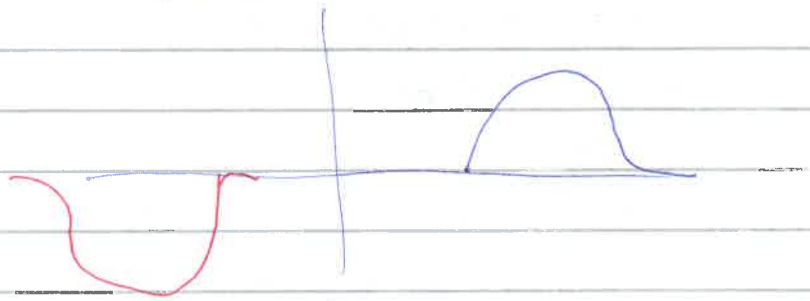


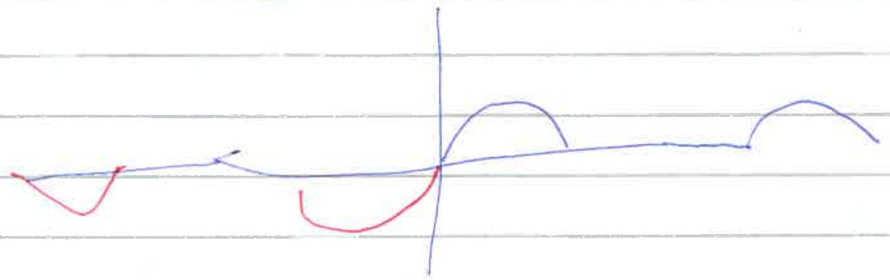


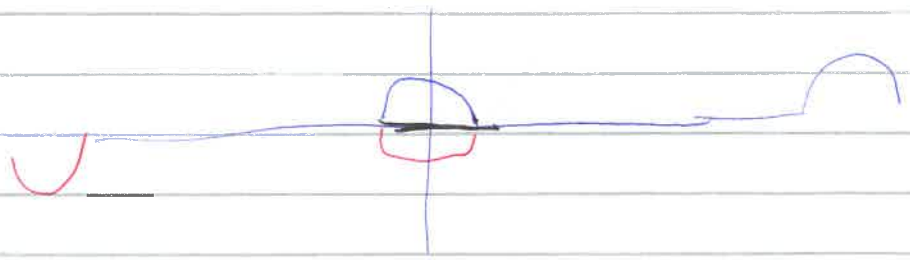


Vzniká odraz se stejnou fází (pulz – zmenší hodnu, zpomalí / při pohledu ke zdi vznikne větší odchylka – jde o vratnou vlnu)

$u(t, 0) = 0$







odraz s opačnou fází – při odrazu vlna vznikne opačný pulz. Stejnou hodnotu naproti ke zdi.

Řešme

$$\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0 \quad \text{na} \quad (0,\infty)\times(0,1)$$

$$u(0,x) = g(x)$$

$$\partial_t u(0,x) = h(x)$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0$$

Hledejme řešení

$$u(t,x) = X(x)\,T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''}{X(x)} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

$$\Rightarrow X = \sin(k\pi x) \quad \text{– viz dříve}$$

Nechť $g(x) = A_k \sin(k\pi x)$

$h(x) = B_k \sin(k\pi x)$

Pak

$$T_k''(t) + (k\pi)^2 T_k(t) = 0$$

$$T_k(0) = A_k$$

$$T_k'(0) = B_k$$

$$T_k(t) = C_1 \sin(k\pi t) + C_2 \cos(k\pi t)$$

$$T_k(0) = A_k = C_2$$

$$T_k'(0) = B_k = k\pi C_1$$

$$T_k(t) = \frac{B_k}{k\pi}\sin(k\pi t) + A_k \cos(k\pi t)$$

$$u(t,x) = \frac{B_k}{k\pi}\sin k\pi t \sin(k\pi x) + A_k \cos(k\pi t)\sin(k\pi x)$$

$\uparrow \sum_{k=1}^{N}$ OK. A co $\sum_{k=1}^{\infty}$?

Ověřit, zda $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\pi t)\sin(k\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k\pi}\sin(k\pi t)\sin(k\pi x)$

Pozor, když u $\sum$ není $\cos t = 0$ řada automaticky sumovatelná a je třeba postupovat jinak. Stačí pokud víme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot k^2 < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \cdot k < \infty.$$

To platí a tedy, aby formálně derivovaná řada konvergovala.

Tedy

$\sum A_k k^2$ znamená že $g \in C^2(\mathbb{R})$ a $\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \in L^2(0,1)$

tedy další liché prodloužení $g(0)=0$ a $g''(0)=0$! $g(1)=0$ $g''(1)=0$

$\sum B_k k$ znamená, že $h \in C^1(\mathbb{R})$ $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \in L^2(0,1)$

Tedy liché prodloužení $h(0)=0$, $h(1)=0$ stačí!

~~Tedy si vezmeme ho~~ Teď by šlo třeba spočítat A_k a B_k ze zadání g a h. To ale neuděláme dále.

Příklad:

Řešme

$\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = \sin(k\pi x) \sin(\alpha t)$ na $(0,\infty)\times(0,1)$ $\alpha > 0$

$u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0$ na $(0,1)$

$u(t,0) = u(t,1) = 0$ na $(0,\infty)$

Řešení:

Víme, že při hledání řešení v prostoru

$u(t,x) = \sum_{k=1} T_k(t) \sin(k\pi x)$,

tedy pro naše účely bude $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin(k\pi x)$,

kde $T_k''(t) + (k\pi)^2 T_k(t) = \sin \alpha t$

$T_k(0) = T_k'(0) = 0$

Hledejme řešení této ODR:

$T_k(t) = C_1 \sin(k\pi t) + C_2 \cos(k\pi t) + T_p(t)$

$u_p(t)$ hledáme jako

a) $\alpha \neq k\pi$ $T_p(t) = A_1 \cos \alpha t + A_2 \sin \alpha t$

b) $\alpha = k\pi$ $T_p(t) = t(A_1 \cos(\alpha t) + A_2 \cos(\alpha t))$

ad a)

$-A_1 \alpha^2 \cos \alpha t - A_2 \alpha^2 \sin \alpha t + (k\pi)^2 A_1 \cos \alpha t + (k\pi)^2 A_2 \sin \alpha t = \sin \alpha t$

$A_1 = 0$ $A_2 = \frac{1}{(k\pi)^2 - \alpha^2}$

$T_k(t) = C_1 \sin(k\pi t) + C_2 \cos(k\pi t) + \frac{1}{(k\pi)^2 - \alpha^2} \sin \alpha t$

$\Rightarrow T_k(0)=0$

$\Rightarrow C_2 = 0$

$T_k'(0)=0 \Rightarrow \quad C_1\, k\pi + \frac{\alpha}{(k\pi)^2-\alpha^2} = 0$

$C_1 = -\frac{\alpha}{k\pi((k\pi)^2-\alpha^2)}$

$u(t,x) = \left(-\frac{\alpha}{k\pi((k\pi)^2-\alpha^2)} \sin(k\pi t) + \frac{1}{(k\pi)^2-\alpha^2}\sin(\alpha t)\right)\sin(k\pi x) \quad t\geq 0 \quad x\in(0,1)$

ale $\alpha \to k\pi$ ~~sedat~~ není jasné

b) $\alpha = k\pi$

$u_p(t) = t(A_1 \cos(k\pi t) + A_2 \sin(k\pi t))$

$2(-A_1(k\pi)\sin(k\pi t) + A_2 \cos(k\pi t)) = \sin(k\pi t) \qquad A_2 = 0$

$A_1 = -\frac{1}{2k\pi}$

$T_p(t) = -t\frac{1}{2k\pi}\cos(k\pi t)$

~~$u(t,x)=$~~ $T(t) = C_1 \sin(k\pi t) + C_2 \cos(k\pi t) - t\frac{1}{2k\pi}\cos(k\pi t)$

$T(0) = 0 \Rightarrow \quad C_2 = 0$

$T'(0) = 0 \Rightarrow \quad C_1 \cdot k\pi - \frac{1}{2\pi k} = 0 \qquad C_1 = \frac{1}{2(k\pi)^2}$

$T(t) = \frac{1}{2(k\pi)^2}\sin(k\pi t) - \frac{t}{2k\pi}\cos(k\pi t)$

Celk. $u(t,x) = \left(\frac{1}{2(k\pi)^2}\sin(k\pi t) - \frac{t}{2k\pi}\cos(k\pi t)\right)\sin(k\pi x)$ řešení je neomezené v čase!

Příklad

$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0$ na $(0,\infty)\times(0,1)$

$u(0,x) = 0$ na $(0,1)$

$\partial_t u(0,x) = (x-1)^2 \cdot \sin^2 x$ na $(0,1)$

$\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,1) = 0$

Řešení:

$X'' + \lambda X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_k(x) = \cos(k\pi x)$

$X'(0) = X'(1) = 0$

$T_k''(t) + (k\pi)^2 T_k(t) = 0$

$T_k(0) = 0 \quad T_k'(0) = B_k$