Geometrie 2
LS 2021/22

Jan Rataj

27. května 2022

Přednáška 19.2.2022

0 Úvod

Přednáška bude míto tyto tři části:

1. Plochy v $\mathbb{R}^n$, tečný prostor, míra na plochách, plošný integrál prvního druhu, Gaussova-Ostrogradského věta.

2. Diferenciální formy v $\mathbb{R}^n$, integrace diferenciálních forem, Stokesova věta.

3. Základy diferenciální geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$: hlavní směry a hlavní křivosti plochy, Gaussova a střední křivost, geodetiky, izometrie ploch, Theorema Egregium.

Připomeňme dvě důležité věty z Matematické analýzy, které budeme opakovaně používat. Pro totální diferenciál zobrazení $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ budeme používat značení $Df(u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $(u \in U)$.

Věta 0.1 (Věta o implicitních funkcích)**.** *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $F : G \to \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m $(m \geq 1)$ a bod $(x_0, y_0) \in G \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ nechť splňuje $F(x_0, y_0) = 0$ a*

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right)_{i=1,j=k+1}^{n-k,n} \neq 0.$$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^k$ bodu x_0 a $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ bodu y_0 taková, že $U \times V \subset G$, a existuje zobrazení $g : U \to V$ třídy C^m takové, že pro každé $x \in U$, $F(x, g(x)) = 0$ a $g(x)$ je jediným bodem $y \in V$, pro nějž $F(x, y) = 0$.

Věta 0.2 (Věta o inverzním zobrazení)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $g : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^m $(m \geq 1)$ a $x_0 \in U$ takový, že matice $Dg(x_0)$ je regulární. Pak existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu x_0 takové, že $g|U_0$ je difeomorfismus třídy C^m (tedy prosté zobrazení a $(g|U_0)^{-1}$ je třídy C^m).*

1 Plošný integrál prvního druhu

1.1 Plochy v $\mathbb{R}^n$

Definice 1.1. (i) *Parametrizovanou k-plochou* (třídy C^m) rozumíme zobrazení $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ třídy C^m definované na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^k$ a splňující $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$, $u \in U$. Obvykle budeme pracovat s parametrizovanými plochami třídy C^1.

(ii) Parametrizovanou k-plochu $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ nazveme *k-mapou*, jestliže φ je homeomorfismus U na $\varphi(U)$.

Příklady:

1. Regulární parametrizovaná křivka $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ je parametrizovanou 1-plochou.
2. Zobrazení

$$\varphi : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u), \quad u > 0,\ v \in \mathbb{R},$$

je parametrizovaná 2-plocha, ale ne mapa.

3. Ani prostá parametrizovaná plocha nemusí být mapou (příklad bude na cvičení).

Tvrzení 1.1 (Graf funkce je mapa)**.** *Je-li $U \subset \mathbb{R}^k$ otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy C^m $(m \geq 1)$, pak zobrazení*

$$\varphi : u \mapsto (u, f(u))$$

je k-mapa třídy C^m (v $\mathbb{R}^n$).

Důkaz. Je zřejmé, že φ je prosté, třídy C^m a $\operatorname{rank} D\varphi = k$ na U. Zbývá ukázat, že φ^{-1} je spojité na $\varphi(U)$. φ^{-1} je ovšem restrikcí projekce z $\mathbb{R}^n$ do prvních k souřadnic, tedy jako restrikce spojitého zobrazení je též spojité. $\square$

Věta 1.2 (Parametrizovaná plocha je lokálně mapou)**.** *(i) Buď $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ parametrizovaná k-plocha. Pak pro každý bod $u \in U$ existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu u takové, že $\varphi|U_0$ je prosté.*

(ii) Buď $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^1 a $U_0 \subset U$ omezená otevřená podmnožina taková, že $\overline{U_0} \subset U$, $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$ pro všechna $u \in U_0$, φ je prosté na U_0 a $\varphi(U_0) \cap \varphi(\overline{U_0} \setminus U_0) = \emptyset$. Pak $\varphi|U_0$ je k-mapa.

Důkaz. (i) Protože $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$, je aspoň jedna čtvercová podmatice $D\varphi(u)$ regulární (to je důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^k$ je regulární. Pak zobrazení $u \mapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_k(u))$ z U do $\mathbb{R}^k$ má regulární diferenciál v bodě u, a podle věty o inverzním zobrazení je tedy na okolí u difeomorfismem, speciálně tedy prosté. Pak i φ je prosté na tomto okolí.

(ii) Potřebujeme ukázat, že $(\varphi|U_0)^{-1}$ je spojité na $\varphi(U_0)$. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tedy že existuje posloupnost $x_i = \varphi(u_i) \in \varphi(U_0)$, $x_i \to x_0 = \varphi(u_0)$, a přitom $u_i \not\to u_0$. Množina U_0 je omezená, tedy existuje podposloupnost $u_{\sigma(i)} \to u' \in \overline{U_0}$, $u' \neq u_0$. Ze spojitosti φ plyne $\varphi(u_{\sigma(i)}) = x_{\sigma(i)} \to \varphi(u')$, tedy $\varphi(u') = \varphi(u_0)$. Dále podle předpokladu musí ležet i $u' \in U_0$, a protože φ je prosté na U_0 dostáváme $u' = u_0$, tedy spor. $\square$

Příklad: Zobrazení $\varphi : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u)$ je 2-mapa na $(0, K) \times (-\pi, \pi)$ pro libovolné $K > 0$.

Definice 1.2 (plocha)**.** Neprázdnou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *k-plochou* (třídy C^m), jestliže ke každému bodu $x \in S$ existuje $V \subset \mathbb{R}^n$ okolí bodu x a k-mapa (třídy C^m) $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ taková, že $\varphi(U) = V \cap S$. Speciálně obraz $\operatorname{im} \varphi = \varphi(U)$ jedné k-plochy φ nazveme *jednoduchou k-plochou.*

Definice 1.3 (atlas plochy)**.** Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha, pak libovolný soubor $\mathcal{A}$ map plochy S s vlastností $S = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \operatorname{im} \varphi$ nazveme *atlasem* plochy S.

Pozn.: Každá k-plocha v $\mathbb{R}^n$ je *lokálně uzavřená* množina, tedy lze ji vyjádřit jako průnik otevřené a uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ (a tedy S je jistě borelovská). Konkrétně můžeme psát $S = \overline{S} \cap G$, kde $G = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} V_\varphi$ je sjednocení otevřených okolí $V = V_\varphi$ z definice k-plochy příslušných mapám z nějakého atlasu plochy S. Ekvivalentně lze říci, že S je relativně otevřená ve svém uzávěru $\overline{S}$.

Příklady:

1. Graf funkce $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ třídy C^1 je jednoduchou k-plochou.
2. Množina $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ s atlasem $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$,
$$\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) = (\cos v, \sin v, u),$$
$\operatorname{dom} \varphi_1 = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$, $\operatorname{dom} \varphi_2 = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$.

Věta 1.3 (Implicitně zadaná plocha)**.** *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $f : G \to \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m. Nechť v každém bodě $x \in f^{-1}(\{0\})$ platí $\operatorname{rank} Df(x) = n-k$. Pak $f^{-1}\{0\}$ je k-plocha třídy C^m.*

Důkaz. Nechť $a \in f^{-1}(\{0\})$. Protože $\operatorname{rank} Df(a) = n - k$, existuje regulární čtvercová submatice $Df(a)$ o $n - k$ řádcích (důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1, j=k+1}^{n-k, n}$$

je regulární. Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U bodu $(a_1, \ldots, a_k)$, okolí V bodu $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ a C^1 zobrazení $g : U \to V$ takové, že $g(a_1, \ldots, a_k) = (a_{k+1}, \ldots, a_n)$ a

$$\operatorname{graf} g := \{(u, g(u) : u \in U\} = f^{-1}(\{0\}) \cap (U \times V).$$

Tedy $f^{-1}(\{0\})$ je k-plocha. $\square$

Příklady:

1. Jednotková sféra v $\mathbb{R}^n$,

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

   je $(n-1)$-plocha.

2. Množina

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1, \, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

   je 2-plocha v $\mathbb{R}^4$.

Přednáška 25.2.2022

1.2 Křivky na ploše a tečný prostor

Pod *regulární parametrizovanou křivkou* na množině $M \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme zobrazení $c : I \to M$ třídy C^1 definované na intervalu I a splňující $c'(t) \neq 0$, $t \in I$.

Tvrzení 1.4 (o křivce na ploše)**.** *Buďte $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ k-mapa a $c : I \to \varphi(U)$ regulární parametrizovaná křivka na jednoduché k-ploše $\varphi(U)$. Pak $u := \varphi^{-1} \circ c : I \to U$ je regulární parametrizovaná křivka v U a platí $c = \varphi \circ u$.*

Důkaz. Zobrazení $u = \varphi^{-1} \circ c$ je zřejmě spojité na intervalu I. Ukážeme, že u je třídy C^1. Zvolme $t_0 \in I$ a označme $x_0 := c(t_0)$, $u_0 := \varphi^{-1}(x_0)$ a $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Protože $\operatorname{rank} D\varphi(u_0) = k$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u_0)\right)_{i,j=1}^k$ je regulární. Označme $\Pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ projekci do prvních k souřadnic a $v_0 := \Pi(x_0)$. Zobrazení $g := \Pi \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^k$ je třídy C^1 a $Dg(u_0)$ je regulární, tedy podle věty o inverzním zobrazení existuje inverzní zobrazení g^{-1} definované na nějakém okolí V bodu v_0, platí přitom $g^{-1} \circ \Pi = \varphi^{-1}$ na $\varphi(U) \cap \Pi^{-1}(V)$. Pro všechna $t \in (\Pi \circ c)^{-1}(v_0)$ je pak

$$u(t) = \varphi^{-1} \circ c(t) = g^{-1} \circ \Pi \circ c(t),$$

tedy u třídy C^1 na $(\Pi \circ c)^{-1}(v_0)$, což je okolí bodu t_0. □

Pozn.: Ze vztahu $c = \varphi \circ u$ plyne

$$c'(t) = D\varphi(u(t))(u'(t)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u(t)) u_i'(t),\ t \in I.$$

Definice 1.4. Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je *tečným vektorem* k ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in S$, jestliže $v = 0$ nebo existuje regulární parametrizovaná křivka $c : I \to S$ na ploše S a bod $t_0 \in I$ tak, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množinu všech tečných vektorů plochy S v bodě $x \in S$ značíme $T_x S$.

Věta 1.5 (popis tečných vektorů plochy)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha a $x \in S$, pak $T_x S$ je k-rozměrný lineární podprostor $\mathbb{R}^n$. Je-li navíc $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to S$ mapa plochy S s vlastností $\varphi(u) = x$ pro nějaký $u \in U$, pak*

$$T_x S = \operatorname{Lin}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u) \right\} \tag{1}$$

a $D\varphi(u)$ je zobrazuje bijektivně $\mathbb{R}^k$ na $T_x S$.

Úmluva: Budeme používat symbol $d\varphi(u)$ pro bijekci $\mathbb{R}^k \to T_x S$.

Důkaz. Stačí ukázat rovnost (1) (protože parciální derivace $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u)$ jsou lineárně nezávislé).

(a) Nechť $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u)$ pro nějaké $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$. Uvažujme křivku

$$c(t) := \varphi(u_1 + \alpha_1 t, \dots, u_k + \alpha_k t), \quad t \in (-\delta, \delta),$$

kde $\delta > 0$ je tak malé, aby argument ležel v definičním oboru mapy φ. Pak c je zřejmě regulární parametrizovaná křivka na ploše S a platí $c(0) = x$ a $c'(0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u)$.

(b) Nechť $c : I \to S$ je regulární parametrizovaná křivka, $c(t_0) = x$. Předpokládejme, že celý obraz křivky c leží v obrazu k-mapy φ. Pak podle předchozího tvrzení $c = \varphi \circ u$ pro regulární parametrizovanou křivku $u = \varphi^{-1} \circ c$, a tedy

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u(t_0))u_i'(t_0).$$

$\square$

Věta 1.6 (změna parametrů plochy)**.** *Buďte $\varphi : U \to S$, $\psi : V \to S$ dvě mapy plochy S takové, že $M := \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Pak zobrazení $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(M) \to \psi^{-1}(M)$ je C^1 difeomorfismus a pro $\varphi(u) = \psi(v) \in M$ platí*

$$D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = (d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u).$$

Důkaz. Buď $x = \varphi(u) = \psi(v) \in M$ (pro vhodné $u \in U$ a $v \in V$). Označme Π kolmou projekci z $\mathbb{R}^n$ do lineárního podprostoru T_xS a $g := \Pi \circ \varphi$, $h := \Pi \circ \psi$ (tedy $g : U \to \mathbb{R}^k$, $h : V \to \mathbb{R}^k$). Diferenciály $Dg(u)$ a $Dh(v)$ jsou regulární, tedy g, resp. h, jsou C^1 difeomorfismy na nějakém okolí bodu u, resp. v. Tedy i $h^{-1} \circ g = \psi^{-1} \circ \varphi$ je C^1 difeomorfismus na okolí bodu u. Protože $\varphi = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)$, musí být

$$D\varphi(u) = D\psi(\psi^{-1}(\varphi(u)) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u),$$

tedy i $d\varphi(u) = d\psi(v) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u)$, z čehož už plyne

$$(d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u) = D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u).$$

$\square$

Definice 1.5. Řekneme, že zobrazení $\Phi : S \to \mathbb{R}^m$ definované na k-ploše S je *třídy C^m* ($m \geq 1$), jestliže pro každou k-mapu $\varphi : U \to S$ je $\Phi \circ \varphi$ třídy C^m. Je-li $\varphi : U \to S$ k-mapa a $x = \varphi(u)$, definujeme *diferenciál* zobrazení Φ v bodě x jako

$$D\Phi(x) := D(\Phi \circ \varphi)(u) \circ (d\varphi(u))^{-1}.$$

Pozn.:

1. $D\Phi(x)$ je lineární zobrazení z T_xS do $\mathbb{R}^m$.
2. Diferencovatelnost Φ stačí ověřit jen pro mapy z nějakého atlasu plochy S.
3. Pro každou mapu φ plochy S je inverzní zobrazení φ^{-1} třídy C^m na ploše $\operatorname{im}\varphi \subset S$.

Tvrzení 1.7 (korektnost definice diferenciálu na ploše)**.** *Definice diferenciálu zobrazení na ploše je korektní (nezávisí na volbě mapy).*

Důkaz. Buďte $\varphi : U \to S$ a $\psi : V \to S$ dvě k-mapy, $x = \varphi(u) = \psi(v)$. Pak $\Phi \circ \varphi = \Phi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi$ na okolí bodu u, a tedy

$$D(\Phi \circ \varphi)(u) = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ (d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u),$$

což dává

$$D(\Phi \circ \varphi)(u) \circ (d\varphi(u))^{-1} = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ (d\psi(v))^{-1}.$$

□

1.3 Míra na ploše, plošný integrál

Motivace: Uvažujme prosté lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $(k < n)$, označme $M := L(\mathbb{R}^k)$, a uvažujme shodnost $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takovou, že $R(M) = \mathbb{R}^k \times \{0, \ldots, 0\}$. Nechť Π je projekce z $\mathbb{R}^n$ do prvních k souřadnic. Pak $\Pi \circ R \circ L$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^k$ a platí

$$|\det(\Pi RL)| = \sqrt{\det((\Pi RL)^T \Pi RL)} = \sqrt{\det(L^T L)}$$

(protože $\Pi^T\Pi$ i $R^T R$ jsou jednotkové matice). Podle věty o substituci (pro lineární zobrazení) je

$$\lambda^k(\Pi \circ R \circ L(B)) = \sqrt{\det(L^T L)}\, \lambda^k(B), \quad B \in \mathcal{B}^k$$

($\mathcal{B}^k$ značí Borelovskou σ-algebru v $\mathbb{R}^k$). Je přirozené definovat (Lebesgueovu) míru λ_M na podprostoru M tak, aby pro každou borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}^n \cap M := \{B \cap M : B \in \mathcal{B}^n\}$ platilo

$$\lambda_M(B) = \lambda^k(\Pi \circ R(B))$$

(neboť $\Pi \circ R$ zobrazuje M izometricky na $\mathbb{R}^k$). Pak lze λ_M popsat předpisem

$$\lambda_M(B) := \sqrt{\det(L^T L)}\, \lambda^k(L^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}^n \cap M.$$

Poznamenejme ještě, že matici zobrazení ΠRL můžeme chápat jako matici lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^k \to M$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi lineárního prostoru M.

Přednáška 4.3.2022

Definice 1.6. Buď $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ k-mapa. Na jednoduché k-ploše $S := \varphi(U)$ definujeme borelovskou míru μ_S předpisem

$$\mu_S(B) := \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k\varphi(u)\, d\lambda^k(u), \quad B \subset S \text{ borelovská},$$

kde

$$J_k\varphi(u) := \sqrt{\det(D\varphi(u)^T D\varphi(u))}, \quad u \in U.$$

Pozn.:

1. $J_k\varphi(u) > 0$, neboť $D\varphi(u)$ má plnou hodnost (bylo na cvičení).
2. $J_k\varphi(u) = |\det d\varphi(u)|$, pokud lineární zobrazení $d\varphi(u) : \mathbb{R}^k \to T_{\varphi(u)}S$ reprezentujeme maticí vzhledem k libovolné ortonormální bázi tečného prostoru $T_{\varphi(u)}S$.

Tvrzení 1.8 (korektnost definice míry na ploše)**.** *Definice μ_S je korektní (nezávisí na volbě parametrizace).*

Důkaz. Mějme $\varphi : U \to S$ a $\psi : V \to S$ dvě k-mapy parametrizující plochu S. Pak $\psi^{-1}\circ\varphi : U \to V$ je C^1-difeomorfismus a podle věty o substituci (z přednášky Teorie míry 1, dokázané v Teorii míry 2) platí (klademe $v = \psi^{-1}\circ\varphi(u)$) a píšeme stručně du, dv místo $d\lambda^k(u), d\lambda^k(v)$)

$$\begin{aligned}\int_{\psi^{-1}(B)} J_k\psi(v)\, dv &= \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k\psi(v)\, |\det D(\psi^{-1}\circ\varphi)(u)|\, du \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} |\det d\psi(v)||\det(d\psi(v))^{-1}(d\varphi(u))|\, du \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k\varphi(u)\, du\end{aligned}$$

(použili jsme vzorec z věty o změně parametrů plochy). $\square$

Tvrzení 1.9 (existence spočetného atlasu)**.** *Každá plocha v $\mathbb{R}^n$ má nejvýše spočetný atlas.*

Důkaz. Očíslujme si $\{U_1, U_2, \dots\}$ všechny koule v $\mathbb{R}^n$ s racionálními středy i poloměry. Nechť je dána k-plocha $S \subset \mathbb{R}^n$ a pro každý bod $x \in S$ označme φ_x nějakou k-mapu S splňující $x \in \operatorname{im}\varphi$. Jistě existuje index $i(x)$ takový, že $x \in U_{i(x)} \cap S \subset \operatorname{im}\varphi_x$. Ke každému $j \in J := \{i(x) : x \in S\}$ vyberme libovolnou mapu $\varphi_j := \varphi_x$ pro nějaké x s $i(x) = j$. Pak $\{\varphi_j : j \in J\}$ je atlas S. $\square$

Věta 1.10 (existence a jednoznačnost míry na ploše; definice)**.** *Na každé k-ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ existuje právě jedna Borelovská míra μ_S taková, že pro každou k-mapu φ plochy S platí $\mu_S|\operatorname{im}\varphi = \mu_{\operatorname{im}\varphi}$.*

Důkaz. Buď $\{\varphi_i : i = 1, 2, \dots\}$ nějaký nejvýše spočetný atlas S. Uvažujme rozklad plochy $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots$, kde $S_1 := \operatorname{im}\varphi_1$, $S_2 := \operatorname{im}\varphi_2 \setminus \operatorname{im}\varphi_1$, $S_3 := \operatorname{im}\varphi_3 \setminus (\operatorname{im}\varphi_1 \cup \operatorname{im}\varphi_2)$, ... Položme

$$\mu_S(B) := \sum_i \mu_{\operatorname{im}\varphi_i}(B \cap S_i), \quad B \in \mathcal{B}^n \cap S.$$

Je-li ψ libovolná k-mapa plochy S, pak pro libovolnou borelovskou množinu $B \subset \operatorname{im}\psi$ platí

$$\mu_S(B) = \sum_i \mu_S(B \cap S_i) = \sum_i \mu_{\operatorname{im}\varphi_i}(B \cap S_i) = \sum_i \mu_{\operatorname{im}\psi}(B \cap S_i) = \mu_{\operatorname{im}\psi}(B)$$

(ve třetí rovnosti jsme využili nezávislosti míry na parametrizaci jednoduché k-plochy). Jednoznačnost je zřejmá. $\square$

Definice 1.7 (Plošný integrál prvního druhu)**.** Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha a $f : S \to \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_S f\, dS := \int_S f\, d\mu_S,$$

má-li integrál na pravé straně smysl (integrál chápeme jako abstraktní Lebesgueův integrál podle borelovské míry μ_S).

Pozn.: Symbol "dS" je tradičně používán pro tento typ plošného integrálu a nevztahuje se ke značení plochy S.

Věta 1.11 (Izometrie ploch)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha a $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ shodnost (izometrie), pak $\rho(S)$ je rovněž k-plocha a platí $\mu_{\rho(S)} = \mu_S \rho^{-1}$.*

Důkaz. Je-li $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ k-mapa, pak $\rho \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ je rovněž k-mapa. Navíc platí $D(\rho \circ \varphi)(u) = R \circ D\varphi(u)$, $u \in U$, kde R je lineární složka shodnosti ρ, a tedy

$$J_k(\rho\circ\varphi)(u) = \sqrt{\det(D\varphi(u))^T R^T R (D\varphi(u))} = \sqrt{\det(D\varphi(u))^T (D\varphi(u))} = J_k\varphi(u).$$

Z toho plyne, že pro libovolnou borelovskou množinu $B \subset \operatorname{im}(\rho \circ \varphi)$

$$\mu_{\operatorname{im}(\rho\circ\varphi)}(B) = \mu_{\operatorname{im}\varphi}(\rho^{-1}(B)).$$

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že pro libovolný atlas (φ_i) plochy S je $(\rho \circ \varphi_i)$ atlas plochy $\rho(S)$. $\square$

Věta 1.12 (Podplochy nižší dimenze mají míru nula)**.** *Buď $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha a $S' \subset S$ l-plocha, $l < k$. Pak $\mu_S(S') = 0$.*

Důkaz. Použitím spočetných atlasů stačí ukázat větu pro případ jednoduchých ploch: $S = \varphi(U)$, $S' = \psi(V)$, kde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je k-mapa a $\psi : V \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ l-mapa. Složené zobrazení $\varphi^{-1} \circ \psi : V \to U \subset \mathbb{R}^k$ je třídy C^1, což ukážeme podobně jako pro případ křivky na ploše ($l = 1$), tedy pomocí vhodné projekce plochy na okolí daného bodu do podprostoru dimenze k. Dále $\varphi^{-1} \circ \psi$ je regulární a je to homeomorfismus, tedy je to l-mapa v $U \subset \mathbb{R}^k$. Množina $Q := \varphi^{-1}(S')$ je tedy (jednoduchá) l-plocha v $\mathbb{R}^k$. Ukážeme, že $\lambda^k(Q) = 0$ (z toho již plyne dokazované tvrzení).

Ke každému bodu $x \in Q$ existuje okolí O_x takové, že $Q \cap O_x$ lze zapsat jako graf funkce, neboli: existuje lineární podprostor $W \subset \mathbb{R}^k$ dimenze l (můžeme volit např. $W = T_x Q$), otevřená množina $W_0 \subset W$, otevřená množina $V_0 \subset W^\perp$ ($W^\perp$ značí kolmý doplněk k W v $\mathbb{R}^k$) a C^1 zobrazení $\xi : W_0 \to V_0$ tak, že pro $O_x = W_0 \times V_0$ je

$$Q \cap O_x = \{(w, \xi(w)) : w \in W_0\}.$$

Skutečně, je-li φ mapa Q na okolí bodu x, pak $\psi := g^{-1} \circ \varphi$ je rovněž mapa na okolí x, pokud $g = \Pi \circ \varphi$ a Π je projekce $\mathbb{R}^k$ do vhodného l-rozměrného podprostoru $\mathbb{R}^k$ (např. $T_x Q$). Mapa ψ je už hledaná mapa odpovídající grafu funkce l proměnných.

Z Fubiniho věty snadno plyne, že míra grafu funkce je nula, tedy $\lambda^k(Q \cap O_x) = 0$. Z otevřeného pokrytí $Q = \bigcup_{x \in Q} O_x$ lze vybrat spočetné podpokrytí (argument je stejný jako při důkazu existence spočetného atlasu), tedy i $\lambda^k(Q) = 0$. $\square$

Definice 1.8 (zobecněná plocha)**.** Neprázdná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *zobecněná k-plocha*, jestliže existuje rozklad

$$S = S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup M_1 \cup \cdots \cup M_q \quad p \geq 1,\ q \geq 0,$$

kde $S_1, \ldots, S_p$ jsou jednoduché k-plochy a M_j je l_j-plocha dimenze $0 \leq l_j < k$, $j = 1, \ldots, q$ ($q \geq 0$), a platí podmínka

$$S_i \cap \left(\bigcup_{i' \neq i} \overline{S_{i'}} \cup \bigcup_{j=1}^{q} \overline{M_j} \right) = \emptyset.$$

Pozn.:

1. Pod 0-plochou rozumíme množinu izolovaných bodů.
2. Jednoduché k-plochy S_i nazveme *komponentami* S. Body $x \in S_i$ nazveme *regulárními body* plochy.
3. Poslední podmínka říká, že každá komponenta musí mít prázdný průnik s uzávěry všech ostatních komponent, jedná se tedy o zesílenou podmínku disjunktnosti.
4. Standardním příkladem zobecněné $(n-1)$-plochy je hranice jednotkové krychle $\partial[0,1]^n$.

Definice 1.9 (míra na zobecněné ploše)**.** Na zobecněné k-ploše $S = S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup M_1 \cup \cdots \cup M_q$ definujeme míru μ_S předpisem

$$\mu_S := \mu_{S_1} + \cdots + \mu_{S_p},$$

a plošný integrál prvního druhu jako integrál podle této míry.

Přednáška 11.3.2022

Tvrzení 1.13 (korektnost definice μ_S)**.** *Definice míry μ_S na zobecněné k-ploše S je konzistentní, tedy nezávisí na reprezentaci zobecněné plochy.*

Důkaz. Mějme dvě různé reprezentace zobecněné k-plochy S:

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q = S_1' \cup \dots \cup S_{p'}' \cup M_1' \cup \dots \cup M_{q'}'.$$

Ukážeme, že

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_{S_i} = \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S_i'},$$

což můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S_i} | S_j' = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S_j'} | S_i$$

(zde využíváme toho, že $\mu_{S_i}(M_l') = \mu_{S_j'}(M_l) = 0$ pro všechna i, j, l).

Pokud $S_i = \varphi_i(U_i)$ a $S_j' = \varphi_j'(U_j')$ jsou příslušné parametrizace, platí

$$S_i \cap S_j' = \varphi_i(U_i \cap ((\varphi_i)^{-1} \circ \varphi_j'(U_j')) = \varphi_j'(U_j' \cap ((\varphi_j')^{-1} \circ \varphi_i(U_i)).$$

Protože φ_i a φ_j' jsou homeomorfismy, je průnik $S_i \cap S_j'$ relativně otevřená množina jak v S_i, tak v S_j' , je to tedy buď prázdná množina, nebo jednoduchá k-plocha a platí

$$\mu_{S_i} | S_j' = \mu_{S_i \cap S_j'} = \mu_{S_j'} | S_i.$$

□

1.4 Gaussova-Ostrogradského věta

Motivace: Newtonův vzorec říká že pro "rozumné" reálné funkce f jedné proměnné platí

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Uvedeme zde analogii pro funkci více proměnných.

Buď $O \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená a g, h dvě reálné funkce třídy C^1 definované na nějakém okolí uzávěru $\overline{O}$ takové, že $g < h$ na O a $g = h$ na hranici ∂O. Položme

$$\Omega := \{(x,t) \in O \times \mathbb{R} : \, g(x) < t < h(x)\}$$

(oblast mezi grafy, otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$). Mějme dále nějakou funkci $F : \Omega \to \mathbb{R}$ třídy C^1. Pro každé $x \in O$ platí podle Newtonova vzorce

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dt = F(x, h(x)) - F(x, g(x)).$$

Zintegrováním obou stran dostaneme

$$\int_O \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dt\,d\lambda^{n-1}(x) = \int_O F(x,h(x)) - F(x,g(x))\,d\lambda^{n-1}(x).$$

Levou stranu můžeme s pomocí Fubiniovy věty zapsat jako $\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial z_n}(z)\,d\lambda^n(z)$. Nechť $\nu(z)$ značí jednotkový vektor vnější normály k oblasti Ω v bodě z. Pokud $z=(x,t)$ leží na grafu funkce h, pak

$$\nu(z) = \left(\|\nabla h(x)\|^2+1\right)^{-1/2}\left(-\frac{\partial h}{\partial z_1}(x),\dots,-\frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}(x),1\right).$$

Zobrazení $x\mapsto(x,h(x))$ pamaterizující graf h má Jakobián $\left(\|\nabla h(x)\|^2+1\right)^{-1/2}$, tedy lze psát

$$\int_O F(x,h(x))\,d\lambda^{n-1}(x) = \int_{\text{graf}\,h} F\,\nu_n\,dS$$

s plošným integrálem na pravé straně, kde ν_n je n-tá souřadnice normálového vektoru *nu*. Analogický vzorec platí i pro graf g a dohromady dostaneme

$$\int_O F(x,h(x)) - F(x,g(x))\,d\lambda^{n-1}(x) = \int_{\partial\Omega} F\,\nu_n\,dS.$$

Výše uvedenou rovnost tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial z_n}(z)\,d\lambda^n(z) = \int_{\partial\Omega} F\,\nu_n\,dS.$$

To je speciální případ následující věty.

Věta 1.14 (Gauss-Ostrogradsky)**.** *Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ je otevřená omezená množina taková, že její hranice $\partial\Omega$ je zobecněná $(n-1)$-plocha s konečným plošným obsahem. Nechť pro regulární body $x\in\partial\Omega$ $\nu(x)$ značí jednotkový vektor vnější normály k Ω v bodě x (tedy $\nu(x)\perp T_x(\partial\Omega)$ a $x+\varepsilon\nu(x)\notin\Omega$ pro dostatečně malá $\varepsilon>0$). Nechť $F:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ je třídy C^1 (tedy lze rozšířit na nějaké okolí množiny $\overline{\Omega}$ jako funkce třídy C^1). Pak platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\,d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} F\,\nu_i\,dS, \quad i=1,\dots,n.$$

Důsledek 1.15 (věta o divergenci)**.** *Nechť Ω je jako v předchozí větě a $T:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ je vektorové pole třídy C^1. Pak*

$$\int_\Omega \operatorname{div} T\,d\lambda^n = \int_{\partial\Omega}\langle T,\nu\rangle\,dS$$

($\operatorname{div} T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ je divergence pole T).

2 Plošný integrál druhého druhu

2.1 Multivektory a diferenciální formy

Mějme vektorový prostor V dimenze n se skalárním součinem (obvykle uvažujeme $V = \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem). Pod *k-lineární formou na V* rozumíme funkci

$$f : V \underbrace{\times \cdots \times}_{k\times} V \to \mathbb{R}$$

lineární v každé proměnné.

Definice 2.1. k-lineární forma $f : V^k \to \mathbb{R}$ je *antisymetrická*, jestliže

$$f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = (\operatorname{sgn} \pi) f(v_1, \dots, v_k)$$

pro všechna $v_1, \dots, v_k \in V$ a pro každou permutaci $\pi \in \Sigma(k)$ množiny $\{1, \dots, k\}$; $\operatorname{sgn} \pi$ značí znaménko permutace π. Prostor všech antisymetrických k-forem na V budeme značit symbolem $\Lambda^{*k}(V)$. Pod 0-formou rozumíme reálné číslo, tedy $\Lambda^{*0}(V) = \mathbb{R}$.

Cvičení: Je-li f antisymetrická k-forma a vektory $v_1, \dots, v_k$ lineárně závislé, pak $f(v_1, \dots, v_k) = 0$

Pozn.: Je-li $(b_1, \dots, b_n)$ báze V, je každá antisymetrická forma $f \in \Lambda^{*k}(V)$ určena hodnotami

$$f(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n.$$

Dále budeme pracovat s $V = \mathbb{R}^n$ a s kanonickou bází $(e_1, \dots, e_n)$.

Značení: Pro indexovou množinu $I \subset \{1, \dots, n\}$ o k prvcích ($|I| = k$) budeme symbolem $e_I^* \in \Lambda^{*k}(\mathbb{R}^n)$ značit antisymetrickou k-formu splňující pro $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$

$$e_I^*(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } I = \{i_1, \dots, i_k\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $I = \emptyset$ klademe $e_\emptyset^* := 1$.

Tvrzení 2.1 (o bázi $\Lambda^{*k}(\mathbb{R}^n)$)**.** *$k$-vektory e_I^*, $|I| = k$, tvoří bázi vektorového prostoru $\Lambda^{*k}(\mathbb{R}^n)$, tedy $\dim \Lambda^{*k}(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$.*

Důkaz. Prvky e_I^* jsou zřejmě lineárně nezávislé (uvažujeme pouze různé množiny k indexů): skutečně, pokud $\sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^* = 0$, pak pro každou pevnou $I_0 = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ je

$$\sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^*(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \alpha_{I_0} = 0,$$

tedy $\alpha_I = 0$ pro každé I. Dále každou $f \in \Lambda^{*k}(\mathbb{R}^n)$ můžeme psát ve tvaru $f = \sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^*$ s koeficienty $\alpha_I = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$. $\square$

Definice 2.2 (vnější algebra, vnější součin)**.** *Vnější algebru* nad $\mathbb{R}^d$ definujeme jako direktní součet

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^d) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^{*k}(\mathbb{R}^d).$$

Zřejmě $\dim \Lambda^*(\mathbb{R}^d) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Pro indexové množiny $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ definujeme *vnější součin* prvků e_I^* a e_J^* jako

$$e_I^* \wedge e_J^* = \begin{cases} \operatorname{sgn}(I, J)\, e_{I\cup J}^*, & \text{pokud } I \cap J = \emptyset, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\operatorname{sgn}(I, J)$ značí znaménko permutace, která převádí prvních $|I|$ prvků množiny $I \cup J$ rostoucím způsobem na I a zbývajících $|J|$ prvků rostoucím způsobem na J. Zřejmě $e_I^* \wedge e_J^* \in \Lambda^{*k+l}(\mathbb{R}^d)$. Vnější součin rozšíříme lineárně na celou vnější algebru $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$.

Cvičení: Pro obecné prvky $f \in \Lambda^{*k}(\mathbb{R}^n)$ a $g \in \Lambda^{*l}(\mathbb{R}^n)$ platí $f \wedge g \in \Lambda^{*k+l}(\mathbb{R}^d)$,

$$(f \wedge g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \Sigma(k,l)} (\operatorname{sgn} \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}),$$

kde $\Sigma(k, l)$ je množina všech permutací $\sigma \in \Sigma(k + l)$ takových, že $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ a $\sigma(k + 1) < \cdots < \sigma(k + l)$.

Značení: Pro jednoprvkové indexové množiny $\{i\}$ budeme psát

$$dx_i := e_i^* := e_{\{i\}}^* \in \Lambda^{*1}(\mathbb{R}^d).$$

Zřejmě pro množinu $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ pak platí

$$e_I^* = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

a i zde budeme používat značení $dx_I := e_I^*$.

Přednáška 18.3.2022

Definice 2.3 (multivektory)**.** Pro vektorový prostor V definujeme vektorový prostor k-vektorů jako

$$\Lambda^k(V) := \Lambda^{*k}(V^*).$$

V případě $V = \mathbb{R}^n$ má tento prostor bázi $\{e_I = e_I^{**}, |I| = k\}$ (ztotožňujeme V^{**} s V). Speciálně $\Lambda^1(\mathbb{R}^d)$ má bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a splývá tedy s $\mathbb{R}^n$. Prostor $\Lambda^{*k}(\mathbb{R}^d)$ můžeme chápat jako duál $(\Lambda^k(\mathbb{R}^n))^*$, položíme-li $e_I^*(e_J) = \delta_{I,J}$. Vnější algebra multivektorů je definována opět jako direktní součet

$$\Lambda(\mathbb{R}^n) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

a je na ní definován vnější součin.

Definice 2.4. k-vektor $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ je *jednoduchý*, jestliže existují $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\alpha = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$.

Cvičení Ukažte, že 2-vektor $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ v $\mathbb{R}^4$ není jednoduchý.

Definice 2.5 (skalární součin)**.** *Pro indexové množiny I, J, $|I| = |J| = k$, definujeme skalární součin jako*

$$e_I \cdot e_J := \begin{cases} 1 & \textit{pokud } I = J, \\ 0 & \textit{jinak}, \end{cases}$$

a rozšíříme tuto definici lineárně na $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Skalární součin indukuje normu $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$.

Cvičení:

1. Pro vektory $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ platí

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = \det\,(u_{i,j})_{i,j=1}^n\ (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n).$$

2. Pro $u, v \in \mathbb{R}^n$ je

$$u \wedge v = \sum_{i<j} (u_i v_j - u_j v_i)(e_i \wedge e_j).$$

Cvičení: Pro multivektor $\alpha \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$ položme $L(\alpha) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \wedge \alpha = 0\}$.

1. Pro $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ je $L(\alpha)$ je vektorový prostor dimenze nejvýše k, přitom $\dim L(\alpha) = k$ právě tehdy, když je α jednoduchý.

2. Jestiže pro $\alpha, \beta \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ platí $L(\alpha) = L(\beta)$, pak $\alpha = c\beta$ pro nějaké $c \neq 0$.

Z výše uvedených vlastností plyne, že normované jednoduché k-vektory reprezentují orientované k-rozměrné podprostory $\mathbb{R}^n$.

Definice 2.6 (diferenciální forma)**.** *Diferenciální formou stupně* k rozumíme hladké (C^∞) zobrazení

$$\omega : \Omega \to \Lambda^{*k}(\mathbb{R}^n)$$

definované na otevřené podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Symbolem $\mathcal{E}^k(\Omega)$ značíme vektorový prostor všech diferenciálních k-forem na Ω.

Pozn.: Každou diferenciální k-formu $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ můžeme psát ve tvaru

$$\omega(x) = \sum_{|I|=k} \omega_I(x)\, dx_I, \quad x \in \Omega,$$

s hladkými reálnými funkcemi $\omega_I : \Omega \to \mathbb{R}$. (Připomeňme, že $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, pokud $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$.)

Definice 2.7. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $0 \le k \le n$. *Vnější (de Rhamův) diferenciál* je zobrazení

$$d : \mathcal{E}^k(\Omega) \to \mathcal{E}^{k+1}(\Omega)$$

definované následovně: Pro $k = 0$ a $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ (f je reálná funkce) klademe

$$df(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i, \quad x \in \Omega.$$

Pro $k > 0$ a $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I$ pak

$$\begin{aligned} d\omega(x) &:= \sum_{|I|=k} (d\omega_I(x) \wedge dx_I) \\ &= \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(x)\, (dx_i \wedge dx_I), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Příklad: Pro 1-formu $\omega(x,y) = (x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy$ dostáváme

$$\begin{aligned} d\omega(x,y) &= 2x(dx \wedge dx) + 2y(dy \wedge dx) - 2y(dx \wedge dy) - 2x(dy \wedge dy) \\ &= -4y\,(dx \wedge dy). \end{aligned}$$

Věta 2.2 (pravidla pro vnější diferenciál)**.** *Pro* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otevřenou,* $0 \le k, l \le n$, $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ *a* $\tau \in \mathcal{E}^l(\Omega)$ *platí:*

(i) $d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau$, *pokud* $k = l$.

(ii) $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k\, \omega \wedge d\tau$.

(iii) $d(d\omega) = 0$.

Důkaz. Vlastnost (i) plyne přímo z definice.

(ii) Vzhledem k linearitě vnějšího diferenciálu stačí rovnost dokázat pro případ $\omega = \omega_I\, dx_I$, $\tau = \tau_J\, dx_J$. Platí

$$\begin{aligned}
d(\omega_I dx_I \wedge \tau_J dx_J) &= d(\omega_I \tau_J (dx_I \wedge dx_J)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J + \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \right) (dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{i=1}^{n} \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} (-1)^k\, dx_I \wedge dx_i \wedge dx_J \\
&= d\omega \wedge \tau + (-1)^k\, \omega \wedge d\tau.
\end{aligned}$$

(iii) Opět stačí uvažovat případ $\omega = \omega_I dx_I$. V případě $k = 0$ je $\omega = f \in c^\infty(\Omega)$, $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ a

$$\begin{aligned}
d(df) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i = 0,
\end{aligned}$$

neboť parciální derivace druhého řádu funkce f jsou symetrické. Pro $k > 0$ pak máme

$$d(\omega_I\, dx_I) = d\omega_I \wedge dx_I$$

a podle pravidla (ii)

$$\begin{aligned}
d^2(\omega_I\, dx_I) &= d(d\omega_I \wedge dx_I) \\
&= d^2\omega_I \wedge dx_I - d\omega_I \wedge d(dx_I) = 0.
\end{aligned}$$

□

Definice 2.8. Diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ $(k \geq 1)$ je *exaktní*, pokud $\omega = d\tau$ pro nějakou $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$. Forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ je *uzavřená*, pokud $d\omega = 0$.

Pozn.: Podle posledního tvrzení předchozí věty je každá exaktní forma uzavřená. Pro některé oblasti Ω platí i obrácená implikace, například pro otevřenou kouli:

Věta 2.3 (Poincarého lemma)**.** *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená koule a $1 \leq k \leq n$, pak každá uzavřená k-forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ je exaktní.*

Pozn.: Poincarého lemma ponecháme bez důkazu. Uvědomme si ale, co říká pro případ $k = 1$. Pak $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ a uzavřenost ω znamená $d\omega = 0$, tedy

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Exaktnost ω zas znamená, že existuje $\tau \in C^\infty(\Omega)$ taková, že

$$\omega_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Poincarého lemma v tomto případě je známo jako *věta o potenciálu*.

Přednáška 25.3.2022

Definice 2.9 (přenos diferenciální formy)**.** Buďte $U \subset \mathbb{R}^m$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny a $\Phi : U \to V$ hladké (C^∞) zobrazení. Pro $0 \le k \le \min(m,n)$ definujeme zobrazení

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(V) \to \mathcal{E}^k(U)$$

následovně:

$$\Phi^*(\omega) := \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k},$$

pokud $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ a $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)^T$.

Pozn.: Pro $k = 0$ je $\Phi^* f = f \circ \Phi$, pro $k \ge 1$ pak

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \Phi) \left(\sum_{j_1=1}^{m} \frac{\partial \Phi_{i_1}}{\partial u_{j_1}} du_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^{m} \frac{\partial \Phi_{i_k}}{\partial u_{j_k}} du_{j_k} \right).$$

Příklad: Pro $\Phi(u,v) = (u \cos v, u \sin v)$ a $\omega = (x^2 + y^2) dx \wedge dy$ je

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega) &= u^2 (d(u \cos v) \wedge d(u \sin v)) \\ &= u^2 (\cos v\, du - u \sin v\, dv) \wedge (\sin v\, du + u \cos v\, dv) \\ &= u^3\, du \wedge dv. \end{aligned}$$

Věta 2.4 (Vlastnosti přenosu dif. formy)**.** *Nechť $\Phi : U \to V$ je třídy C^∞, $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny, $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$, $\tau \in \mathcal{E}^l(V)$. Pak platí:*

(i) $\Phi^*(\omega + \tau) = \Phi^*\omega + \Phi^*\tau$, *pokud* $k = l$,

(ii) $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau$,

(iii) $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$,

(iv) je-li $\Psi : W \to U$ *třídy* C^∞, $W \subset \mathbb{R}^p$ *otevřená, pak* $(\Phi \circ \Psi)^*\omega = \Psi^* \circ \Phi^*(\omega)$,

(v) pro $k = l = n$ *a* $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ *je*

$$\Phi^*\omega = J\Phi\, (f \circ \Phi)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

kde

$$J\Phi = \det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Důkaz. (i) Plyne z přímo z definice.

(ii) Stačí (vzhledem k (i)) dokázat pro případ $\omega = \omega_I dx_I$, $\tau = \tau_J dx_J$. Nechť $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ a $J = \{j_1 < \cdots < j_l\}$. Pak

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega \wedge \tau) &= \Phi^*(\omega_I \tau_J\, dx_I \wedge dx_J) \\ &= (\omega_I \circ \Phi)(\tau_J \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k} \wedge d\Phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{j_l} \\ &= \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau. \end{aligned}$$

(iii) Dokazujeme opět pro případ $\omega = \omega_J dx_I$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$. Podle definice je

$$\begin{aligned}
\Phi^*(d\omega) &= \Phi^*\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \circ \Phi\right) d\Phi_i \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k}, \\
d(\Phi^*\omega) &= d\left((\omega_I \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j}\, du_j \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k}.
\end{aligned}$$

Dosazením rovností

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_j \quad \text{a} \quad \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \circ \Phi\right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}$$

do výše uvedených vztahů dostaneme kýženou rovnost $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$.

(iv) Pokud $\omega = f \in \mathcal{E}^0(V)$, pak

$$(\Phi \circ \Psi)^*\omega = f \circ (\Phi \circ \Psi) = (f \circ \Phi) \circ \Psi = \Psi^*(f \circ \Phi) = \Psi^* \circ \Phi^*(f).$$

Pokud dále $\omega = dx_i \in \mathcal{E}^1(V)$, pak

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ \Psi)^*\omega &= \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial(\Phi \circ \Psi)_i}{\partial y_j}\, dy_j = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} \circ \Psi\right) \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \Psi_l}{\partial y_j} dy_j\right) \\
&= \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} \circ \Psi\right) d\Psi_l = \Psi^*\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} du_l\right) = \Psi^*(\Phi^*\omega).
\end{aligned}$$

Obecný případ dostaneme pomocí vlastností (i) a (ii).

(v) Pro $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ je skutečně

$$\begin{aligned}
\Phi^*\omega &= (f \circ \Phi) d\Phi_1 \wedge \cdots \wedge d\Phi_n \\
&= (f \circ \Phi) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_j} du_j\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_j} du_j\right) \\
&= (f \circ \Phi) J\Phi\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n.
\end{aligned}$$

□

2.2 Orientace plochy, integrace diferenciálních forem

Definice 2.10 (orientace plochy)**.** *Orientací* k-plochy $S \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme spojité zobrazení

$$\tau : S \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

takové, že pro každý bod $x \in S$ je $\tau(x)$ jednoduchý k-vektor s normou $\|\tau(x)\| = 1$ a splňující $\tau(x) \in \Lambda^k(T_x S)$ (tedy $\tau(x)$ reprezentuje tečný prostor $T_x S$).

Příklady:

1. Pro 1-plochu S a $x \in S$ je $\tau(x)$ jednotkový vektor tečný k S v x.

2. Pro válcovou plochu $S = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ můžeme volit třeba

$$\tau(x, y, z) = (y, -x, 0) \wedge (0, 0, 1), \quad (x, y, z) \in S.$$

Definice 2.11 (orientovaný atlas)**.** Jednoduchá k-plocha $S = \varphi(U)$ má orientaci

$$\tau(\varphi(u)) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u)}{\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u) \right\|}, \quad u \in U;$$

tuto orientaci nazveme *orientací indukovanou parametrizací* φ. Řekneme, že dvě mapy φ, ψ plochy S s protínajícími se obrazy jsou *shodně orienované*, jestliže $\tau(\varphi(u)) = \tau(\psi(v))$ kdykoliv $\varphi(u) = \psi(v) \in S$. Atlas $\mathcal{A}$ plochy S nazveme *orientovaným atlasem*, jsou-li každé jeho dvě mapy s protínajícími se obrazy shodně orientované. Orientovaný atlas zřejmě určuje orientaci plochy.

Cvičení: Dvě mapy φ, ψ plochy S jsou shodně orientované právě tehdy, když pro každý bod $\varphi(u) = \psi(v) \in S$ platí

$$J(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = \det D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) > 0.$$

Cvičení: Popište dvě různé orientace jednotkové sféry S^2.

Definice 2.12 (rozklad jednotky)**.** *Rozkladem jednotky* na množině $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme soubor funkcí $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ takových, že

1. Pro každé $\alpha \in I$, $h_\alpha : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ je funkce třídy C^∞ s kompaktním nosičem $\operatorname{spt} h_\alpha := \operatorname{cl}\{x \in \mathbb{R}^n : h_\alpha(x) > 0\}$;

2. soubor $(\operatorname{spt} h_\alpha)_{\alpha \in I}$ je *lokálně konečný* (tzn.: pro každý bod $x \in \mathbb{R}^n$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina $\{\alpha \in I : \operatorname{spt} h_\alpha \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}$ je konečná;

3. pro každý $x \in M$ je $\sum_{\alpha \in I} h_\alpha(x) = 1$.

Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k-plocha třídy C^∞ s atlasem $\mathcal{A}$, pak existuje rozklad jednotky (h_α) na S takový, že pro každé α existuje mapa $\varphi \in \mathcal{A}$ splňující $S \cap \operatorname{spt} h_\alpha \subset \operatorname{im} \varphi$. Budeme říkat, že takový rozklad jednotky na ploše S je *podřízený atlasu* $\mathcal{A}$.

(Bude ukázáno příště.)

Přednáška 1.4.2022

Věta 2.5 (existence rozkladu jednotky)**.** *Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha s atlasem $\mathcal{A}$. Pak existuje rozklad jednotky $(h_\alpha)_{\alpha\in I}$ na S* podřízený atlasu $\mathcal{A}$*, tedy takový, že ke každému $\alpha \in I$ existuje $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}$ tak, že* $\operatorname{spt} h_\alpha \cap S \subset \operatorname{im}\varphi_\alpha$.

Důkaz (nebude zkoušen). (1) Ke každému $x \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$ existuje funkce $f_{a,r} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ třídy C^∞ a taková, že $f_{a,r}(x) > 0$ právě tehdy, když $\|x-a\| < r$. Můžeme vzít například funkci

$$f_{a,r}(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{\|x-a\|^2}{\|x-a\|^2-r^2}\right), & \|x-a\| < r,\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

(2) Předpokládejme nejprve, že plocha S je kompaktní. Ke každému bodu $x \in S$ najdeme poloměr $r(x) > 0$ takový, že $B(x, r(x)) \cap S \subset \operatorname{im}\varphi$ pro nějakou mapu $\varphi \in \mathcal{A}$. Otevřené koule $U_{r(x)}(x)$, $x \in S$, pokrývají kompakt S, existuje tedy konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_k \in S$ tak, že

$$S \subset U := U_{r(x_1)}(x_1) \cup \cdots \cup U_{r(x_k)}(x_k).$$

Funkce $g(x) := \sum_{j=1}^k f_{x_j, r(x_j)}(x)$ je kladná na kompaktní množině S a nabývá zde minima $\delta > 0$. Nechť $q : \mathbb{R} \to [0,1]$ je C^∞ funkce splňující $q(t) = 0$ pro $t \le 0$ a $q(t) = 1$ pro $t \ge \delta$. Pak funkce

$$h_i(x) := \begin{cases} q(g(x))\frac{f_{x_i, r(x_i)}(x)}{g(x)}, & x \in U,\\ 0, & x \notin U,\end{cases}$$

$i = 1, \dots, k$, tvoří hledaný rozklad jednotky.

(3) Pro obecnou k-plochu S využijeme lokální uzavřenosti S a najdeme posloupnost kompaktních množin (K_j) v $\mathbb{R}^n$ takovou, že $S \cap K_j$ je kompaktní a $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$ pro každé j, a navíc $S = \bigcup_j (S \cap K_j)$. Je-li $S = F \cap G$ s uzavřenou F a otevřenou G, můžeme volit

$$K_j = [-j, j]^n \cap \{x \in G : \operatorname{dist}(x, \partial G) \ge j^{-1}\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Podle postupu z části (2) pak najdeme pro každé j konečně mnoho bodů

$$x_1^j, \dots, x_{k(j)}^j \in S_j := S \cap (K_j \setminus \operatorname{int} K_{j-1})$$

a poloměry $r(x_i^j) > 0$ tak, že otevřené koule $U_{r(x_i^j)}(x_i^j)$ pokrývají S_j, ale přitom jejich uzávěry nezasahují S_l pro $|l - j| > 1$. Hledaný rozklad jednotky je

$$h_{i,j}(x) := \frac{f_{x_i^j, r(x_i^j)}(x)}{\sum_{p=1}^\infty \sum_{p=1}^{k(p)} f_{x_q^p, r(x_q^p)}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ i = 1, \dots, k(j),\ j \in \mathbb{N}.$$

□

Definice 2.13 (integrace diferenciálních forem). 1. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega)$, pak $w = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ pro nějakou funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ a definujeme

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f(x)\,d\lambda^n(x),$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

2. Je-li $S = \varphi(U)$ jednoduchá k-plocha v $\mathbb{R}^n$ určená C^∞ mapou φ, $\Omega \supset S$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, definujeme

$$\int_S \omega := \int_U \varphi^*\omega,$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

3. Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k-plocha třídy C^∞ s atlasem $\mathcal{A}$, $\Omega \supset S$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ taková, že

$$\int_S \|\omega\|\,dS < \infty,$$

definujeme

$$\int_S \omega := \sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} (h_\alpha \omega);$$

zde (h_α) je nějaký rozklad jednotky na na S podřízený atlasu $\mathcal{A}$ a pro každé α, φ_α je nějaká mapa atlasu $\mathcal{A}$ splňující $S \cap \operatorname{spt} h_\alpha \subset \operatorname{im}\varphi_\alpha$.

Pozn.:

1. $\|\omega(x)\|$ značí normu $\omega(x) \in \Lambda^{*k}(\mathbb{R}^n)$, tedy pro $\omega(x) = \sum_{|I|=k} \omega_I(x)dx_I$ je

$$\|\omega(x)\| = \sqrt{\sum_{|I|=k} \omega_I(x)^2}.$$

2. z předpokladu $\int_S \|\omega\|\,dS < \infty$ plyne, že suma v definici $\int_S \omega$ konverguje absolutně pro každý rozklad jednotky podřízený nějakému atlasu. Z Tvrzení 2.6 níže totiž plyne

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \left| \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} (h_\alpha\omega) \right| &\le \sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} \|(h_\alpha\omega)\|\,dS \\ &= \sum_\alpha \int_S h_\alpha \|\omega\|\,dS = \int_S \|\omega\|\,dS < \infty.\end{aligned}$$

3. $\int_S \omega$ je vždy definován, pokud je $S \cap \operatorname{spt}\omega$ kompaktní. (Spojitá funkce $\|\omega(x)\|$ je totiž omezená na kompaktu $S \cap \operatorname{spt}\omega$ a zároveň $\mu_S(S \cap \operatorname{spt}\omega) < \infty$.)

4. Zobrazení $\omega \mapsto \int_S \omega$ je lineární.

5. Korektnost definice (nezávislost na volbě atlasu a podřízeného rozkladu jednotky) plyne z následujících tvrzení.

Tvrzení 2.6. *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k-plocha, $\Omega \supset S$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, pak*

$$\left|\int_S \omega\right| \le \int_S \|\omega\|\, dS,$$

je-li integrál na levé straně definován.

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro případ jednoduché plochy $S = \varphi(U)$. Nechť $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I\, dx_I$. Pak

$$\varphi^*\omega = \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi)\, d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}$$

(kde $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$), a tedy

$$\|\varphi^*\omega\| \le \sqrt{\sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi)^2} \sqrt{\sum_{|I|=k} \|d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}\|^2} = \|\omega \circ \varphi\|\, |J_k\varphi|,$$

tudíž

$$\left|\int_S \omega\right| = \left|\int_U \varphi^*\omega\right| \le \int_U \|\varphi^*\omega\|\, d\lambda^k \le \int_U \|\omega \circ \varphi\|\, |J_k\varphi|\, d\lambda^k = \int_S \|\omega\|\, dS.$$

□

Tvrzení 2.7 (korektnost definice integrálu z diferenciální formy). *(i) Je-li $g : V \to U$ C^∞ difeomorfismus dvou otevřených množin $U, V \subset \mathbb{R}^n$ s kladným Jakobiánem ($Jg > 0$ na V), pak pro každou n-formu $\omega \in \mathcal{E}^n(U)$ platí $\int_U \omega = \int_V g^*\omega$.*

1. *Jsou-li $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ a $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dvě shodně orientované k-mapy třídy C^∞ parametrizující tutéž jednoduchou k-plochu $S = \varphi(U) = \psi(V)$, $\Omega \supset S$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, pak platí*

$$\int_U \varphi^*\omega = \int_V \psi^*\omega.$$

(iii) Jsou-li $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ dva kladně orientované C^∞ atlasy téže orientované k-plochy S a (h_α), (h'_β) jim podřízené rozklady jednotky na S, pak platí

$$\sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} (h_\alpha\omega) = \sum_\beta \int_{\operatorname{im}\varphi'_\beta} (h'_\beta\omega).$$

Podle výše uvedené poznámky všechny sumy konvergují absolutně.

Důkaz. (i) Pro n-formu $\omega = f\,du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ platí

$$g^*\omega = (Jg)(f \circ g)\,dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n,$$

a tedy

$$\int_U \omega = \int_U f(u)\,d\lambda^n(u),$$
$$\int_V g^*\omega = \int_V (f \circ g)(v) Jg(v)\,d\lambda^n(v),$$

a oba integrály na pravé straně se rovnají podle věty o substituci (připomeňme, že $Jg > 0$).

(ii) Víme, že přechodové zobrazení $g := \varphi^{-1} \circ \psi : V \to U$ je C^∞ difeomorfismus, který má navíc kladný Jakobián (díky shodné orientaci map). Platí tedy

$$\int_V \psi^*\omega = \int_V (\varphi \circ g)^*\omega = \int_V g^*(\varphi^*\omega) = \int_U \varphi^*\omega.$$

Využili jsme vzorec pro přenos složeným zobrazením a část (i).

(iii) Protože (h_α) i (h'_β) jsou rozklady jednotky, platí pro všechna α, β

$$h_\alpha = \sum_\beta h_\alpha h'_\beta, \quad h'_\beta = \sum_\alpha h_\alpha h'_\beta,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} (h_\alpha\omega) &= \sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} \sum_\beta h_\alpha h'_\beta \omega \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha \cap \operatorname{im}\varphi'_\beta} (h_\alpha h'_\beta \omega) = \sum_\beta \int_{\operatorname{im}\varphi'_\beta} (h'_\beta\omega).\end{aligned}$$

□

K praktickému výpočtu integrálu nepoužíváme rozklad jednotky, nýbrž následující vzorec.

Tvrzení 2.8. *Buď $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha třídy C^∞ a $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ mapy S s disjunktními obrazy $S_i := \operatorname{im}\varphi_i \subset S$, $i = 1, \ldots, p$, a takové, že*

$$S \setminus \bigcup_{i=1}^p S_i \subset \bigcup_{j=1}^q M_j$$

pro nějaké plochy $M_1, \ldots, M_q$ dimenze nižší než k. Nechť $\Omega \supset S$ je otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ taková, že $\int_S \|\omega\|\,dS < \infty$. Pak

$$\int_S \omega = \sum_{i=1}^p \int_{S_i} \omega.$$

Důkaz. Nechť (h_α) je nějaký rozklad jednotky na S podřízený nějakému atlasu S. Podle definice je $\int_S \omega = \sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega)$ (kde φ_α je nějaká mapa atlasu plochy s vlastností $S \cap \operatorname{spt} h_\alpha \subset \operatorname{im}\varphi_\alpha$).

Pro každé α pak platí (značíme U_α definiční obor mapy φ_α)

$$\begin{aligned}\int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} (h_\alpha\omega) &= \int_{U_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega)\,d\lambda^k \\ &= \int_{\bigcup_i (U_\alpha\cap\varphi_\alpha^{-1}S_i)\cup\bigcup_j (U_\alpha\cap\varphi_\alpha^{-1}M_j)} \varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega)\,d\lambda^k.\end{aligned}$$

Víme, že $\varphi_\alpha^{-1}M_j$ je plocha dimenze menší než k, tedy její k-rozměrná míra je nulová. Dále pro každé i nechť $\varphi_i : U_i \to S_i$ je příslušná mapa. $S_i \cap \operatorname{im}\varphi_\alpha$ buď prázdná množina, nebo jednoduchá k-plocha, a z nezávislosti integrálu na parametrizaci dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} (h_\alpha\omega) &= \int_{\bigcup_i (U_\alpha\cap\varphi_\alpha^{-1}S_i)} \varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega)\,d\lambda^k \\ &= \sum_i \int_{U_\alpha\cap\varphi_\alpha^{-1}S_i} \varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega)\,d\lambda^k \\ &= \sum_i \int_{U_i} \varphi_i^*(h_\alpha\omega)\,d\lambda^k \\ &= \sum_i \int_{S_i} (h_\alpha\omega).\end{aligned}$$

Sečtením přes všechna α dostaneme kýženou rovnost. $\square$

Přednáška 8.4.2022

2.3 Plochy s krajem a Stokesova věta

Definice 2.14 (plocha s krajem)**.** Řekneme, že neprázdná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *k-plocha s krajem* (třídy C^∞), jestliže ke každému bodu $x \in S$ existuje otevřená množina $V \ni x$, $U_\varphi \subset \mathbb{R}^k$ otevřená, k-mapa $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{R}^n$ (třídy C^∞) a uzavřený poloprostor $H_\varphi \subset \mathbb{R}^k$ takové, že

$$\varphi(H_\varphi \cap U_\varphi) = S \cap V.$$

Soubor takovýchto k-map, jejichž obrazy pokrývají S, nazveme atlasem S. Množinu

$$\partial S := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \varphi(\partial H_\varphi \cap U_\varphi)$$

nazveme *krajem* plochy S a množinu

$$\operatorname{int} S := S \setminus \partial S$$

vnitřkem S.

Pozn.:

1. Uzavřeným poloprostorem $\mathbb{R}^k$ rozumíme libovolnou množinu

$$\{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, a\rangle \le t\}, \quad a \in S^{k-1},\ t \in \mathbb{R}.$$

2. Ke každému bodu $x \in S$ existuje okolí v S homeomorfní relativně otevřené podmnožině uzavřeného poloprostoru $\mathbb{R}^k$. Bod x je bodem vnitřku S právě tehdy, když je nějaké jeho okolí v S je homeomorfní otevřené podmnožině $\mathbb{R}^k$. Definice kraje a vnitřku plochy tedy nezávisí na volbě atlasu.

3. Upozornění: ∂S zde neznačí hranici plochy v metrice $\mathbb{R}^n$.

4. Pro každou mapu φ plochy s krajem S jsou $\varphi(\operatorname{int} H_\varphi \cap U_\varphi)$ a $\varphi(U_\varphi \setminus H_\varphi)$ dvě disjunktní k-plochy, pokud jsou to neprázdné množiny.

5. Plocha s krajem nemusí být uzavřená množina. I plocha samotná (bez kraje) splňuje definici plochy s krajem. Jako příklady 2-ploch s krajem můžeme vzít vnitřek čtverce a přidat k němu vnitřky některých (nebo všech) jeho hran.

Tvrzení 2.9 (kraj k-plochy je $(k-1)$-plocha)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha s krajem, pak její kraj ∂S je prázdná množina nebo $(k-1)$-plocha.*

Důkaz. Ke každému bodu $x \in \partial S$ existuje otevřená množina $x \in V \subset \mathbb{R}^n$, k-mapa $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{R}^n$ a uzavřený poloprostor $H_\varphi \subset \mathbb{R}^k$ tak, že $S \cap V = \varphi(H_\varphi \cap U_\varphi)$. Stačí ověřit, že restrikce $\tilde{\varphi} := \varphi|(U_\varphi \cap \partial H_\varphi)$ je $(k-1)$-mapa. Hranici ∂H_φ můžeme ztotožnit s $\mathbb{R}^{k-1}$ a $U_\varphi \cap \partial H_\varphi$ je její otevřená podmnožina. $\tilde{\varphi}$ je třídy

C^∞ a jeho diferencál má plnou hodnost (jinak by ani diferenciál φ ve stejném bodě neměl plnou hodnost). Konečně zobrazení

$$\tilde{\varphi} : U_\varphi \cap \partial H_\varphi \to V \cap \partial S$$

je homeomorfismus ($\tilde{\varphi}$ i $\tilde{\varphi}^{-1}$ jsou restrikce spojitých zobrazení, tedy spojitá zobrazení). $\square$

Definice 2.15 (vnější normálový vektor)**.** Je-li $H \subset \mathbb{R}^k$ uzavřený poloprostor tvaru $H = \{y : \langle y, a\rangle \leq t\}$ pro nějaký jednotkový vektor $a \in \mathbb{R}^k$ a $t \in \mathbb{R}$, pak vektor a nazveme *vnějším normálovým vektorem* poloprostoru H.

Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha s krajem, $x \in \partial S$ bod kraje plochy, φ mapa S splňující $x = \varphi(u)$ pro nějaký bod $x \in U$ a a jednotkový vnější normálový vektor poloprostoru H_φ, pak vektor

$$\nu_S(x) := \frac{\Pi(D\varphi(u)(a))|T_x(\partial S)^\perp}{\|\Pi(D\varphi(u)(a))|T_x(\partial S)^\perp\|}$$

nazveme *vnějším (jednotkovým) normálovým vektorem plochy* S v bodě kraje x; zde $\Pi(v|T_x(\partial S)^\perp)$ značí kolmou projekci vektoru v do kolmého doplňku tečného prostoru $T_x(\partial S)$.

Pozn.: I když x je bodem kraje plochy, můžeme uvažovat tečný prostor $T_x S = \operatorname{im} D\varphi(u)$ (jedná se o tečný prostor jednoduché k-plochy $\varphi(U_\varphi)$, která "prodlužuje" plochu S přes její kraj v bodě x). Vektor $\nu_S(x)$ zřejmě leží v tečném prostoru $T_x S$ a je kolmý k podprostoru $T_x(\partial S)$ dimenze $k-1$ a zároveň směřuje "ven" z plochy S, tedy $x + \varepsilon\nu_S(x) \notin S$ pro $\varepsilon > 0$ dostatečně malá. Tím je vektor $\nu_S(x)$ jednoznačně určen a nezávisí na volbě mapy φ.

Definice 2.16 (Hodgeho dualita)**.** Je-li V vektorový prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a s ortonormální bází $(e_1, \ldots, e_n)$ (určující orientaci V), pak lineární operátor $\star : V \to \Lambda^{n-1}(V)$ je definován předpisem

$$v \mapsto \star v, \quad u \wedge (\star v) = \langle u, v\rangle\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \quad u \in V.$$

Cvičení: Ukažte, že operátor $\star$ je korektně definován. Dále ověřte, že v případě $V = \mathbb{R}^n$

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = \star v \iff v = v_1 \times \cdots \times v_{n-1},$$

tedy že $\star$ je v jistém smyslu duální operátor k vektorovému součinu.

Pozn.: Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha s krajem, pak $\operatorname{int} S := S \setminus \partial S$ (vnitřek plochy S) je k-plocha. Je-li dále τ orientace plochy $\operatorname{int} S$, lze tuto orientaci vždy jednoznačně rozšířit i do bodů kraje S. Zároveň máme v krajních bodech plochy definován i k-rozměrný tečný prostor $T_x S$.

Definice 2.17 (orientace plochy s krajem)**.** Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k-plocha s krajem s orientací $x \mapsto \tau_S(x)$, $x \in S$, pak indukovaná orientaci kraje ∂S je definovaná jako

$$\tau_{\partial S}(x) := \star_T \nu_S(x), \quad x \in \partial S,$$

kde $T = T_x S$ je tečný prostor plochy S v bodě x orientovaný ve shodě s orientací S a $\star_T$ značí Hodgeho dualitu v prostoru T.

Pozn.: Pro $\tau_{\partial S}(x) = u_1 \wedge \cdots \wedge u_{k-1}$ musí vždy být

$$(\nu_S(x), u_1, \ldots, u_{n-1})$$

kladně orientovaná báze tečného prostoru $T_x S$.

Věta 2.10 (Stokesova věta pro poloprostor)**.** *Buď $H \subset \mathbb{R}^n$ uzavřený poloprostor s orientací $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ a $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ forma s kompaktním nosičem. Pak*

$$\int_{\operatorname{int} H} d\omega = \int_{\partial H} \omega.$$

Důkaz. Forma ω je tvaru

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \omega_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

a tedy

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Bez újmy na obecnosti (volbou vhodné ortonormální báze) můžeme předpokládat, že $H = \{x : \, x_n \le 0\}$. Pro všechna $i < n$ je pak $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i = 0$ (protože všechny parciální derivace mají kompaktní nosič). Platí tedy

$$\int_{\operatorname{int} H} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0,$$

a dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{int} H} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \ldots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \, dx_1 \ldots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Funkce

$$\varphi : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$$

parametrizuje hranici ∂H, s orientací $(-1)^{n-1}$ (tedy tato mapa indukuje kladnou orientaci hranice pro n liché a zápornou pro n sudé). Pak platí

$$\begin{aligned}\int_{\partial H} \omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi^* \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.\end{aligned}$$

□

Věta 2.11 (Stokesova věta)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní orientovaná k-plocha třídy C^∞ s krajem, $\Omega \supset S$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$, pak*

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{\operatorname{int} S} d\omega.$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je (orientovaný) atlas S a (h_α) rozklad jednotky podřízený atlasu $\mathcal{A}$. Protože S je kompaktní, můžeme předpokládat, že rozklad jednotky je konečný, a oba integrály konvergují. Pro každé α nechť $\varphi_\alpha : U_\alpha \to S$ je mapa atlasu $\mathcal{A}$ s příslušným poloprostorem $H_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ a s vlastností $S \cap \operatorname{spt} h_\alpha \subset \operatorname{im} \varphi_\alpha$. Pak platí

$$\begin{aligned}\int_{\operatorname{int} S} d\omega &= \int_{\operatorname{int} S} d\left(\sum_\alpha h_\alpha \omega\right) = \sum_\alpha \int_{\operatorname{int} S \cap \operatorname{im} \varphi_\alpha} d(h_\alpha \omega) \\ &= \sum_\alpha \int_{U_\alpha \cap \operatorname{int} H_\alpha} \varphi_\alpha^*(d(h_\alpha \omega)) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha \cap \operatorname{int} H_\alpha} d(\varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega)) \\ &= \sum_\alpha \int_{\operatorname{int} H_\alpha} d(\varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega)) = \sum_\alpha \int_{\partial H_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega) \\ &= \sum_\alpha \int_{\partial S} h_\alpha \omega = \int_{\partial S} \omega.\end{aligned}$$

□

Přednáška 22.4.2022

Důsledek 2.12 (Věta o divergenci)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní n-plocha s krajem, $\Omega \subset S$ otevřená a $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole třídy C^∞, pak*

$$\int_{\operatorname{int} S} \operatorname{div} F \, d\lambda^n = \int_{\partial S} \langle F, \nu_S \rangle \, dS$$

($\nu_S(x)$ je vnější jednotkový normálový vektor k S v bodě $x \in \partial S$).

Důkaz. Uvažujme formu

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} F_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega).$$

Platí $d\omega = \operatorname{div} F \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, a podle Stokesovy věty tedy platí

$$\int_{\operatorname{int} S} \operatorname{div} F \, d\lambda^n = \int_{\partial S} \omega.$$

Zbývá ukázat, že

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{\partial S} \langle F, \nu_S \rangle \, dS.$$

Výpočet je ponechán na cvičení. □

Důsledek 2.13 (Greenova věta)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^2$ kompaktní 2-plocha s krajem taková, že $\operatorname{int} S$ je souvislá, γ křivka obíhající hranici ∂S v kladném smyslu, $\Omega \subset S$ otevřená a $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vektorové pole třídy C^∞, pak*

$$\int_{\operatorname{int} S} \operatorname{rot} F \, d\lambda^2 = \int_\gamma (F_1 dx + F_2 dy),$$

kde

$$\operatorname{rot} F := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

je rotace *pole F a na pravé straně je křivkový integrál druhého druhu.*

Důkaz. Obraz křivky $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ je 1-plocha a její vnější normálový vektor dostaneme normalizací vektoru $(y'(t), -x'(t))$. Podle Gauss-Ostrogradského věty je tedy pro vektorové pole G

$$\int_{\operatorname{int} S} \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) d\lambda^2 = \int_\gamma (-G_2 \, dx + G_1 dy).$$

Volbou $G := (F_2, -F_1)$ dostaneme kýžený vzorec. □

Výše uvedené věty se týkají jen hladkých ploch s hladkým krajem. Uvedeme ještě na závěr této kapitole zobecnění pro plochy se "skoro hladkým krajem". Začneme větou, která je velmi podobná Větě 1.14.

Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^k$ je *těleso se skoro hladkou hranicí*, jestliže

(i) M je kompaktní a $\operatorname{int} M \neq \emptyset$,

(ii) existuje podmnožina $M^* \subset \partial M$, která je sjednocením konečně mnoha ploch dimenze menší než $k-1$ ($M^* = \emptyset$, pokud $k = 1$) a taková, že $M \setminus M^*$ je k-plocha s krajem,

1. $\mu_{\partial M \setminus M^*}(\partial M \setminus M^*) < \infty$.

Hranici ∂M nazveme *krajem* M a integrál z diferenciální formy ω přes ∂M definujeme jako

$$\int_{\partial M} \omega := \int_{\partial(M \setminus M^*)} \omega = \int_{\partial M \setminus M^*} \omega$$

(tedy při integraci ignorujeme iregulární body z M^*).

Věta 2.14 (zobecněná Gaussova věta)**.** *Je-li $M \subset \mathbb{R}^k$ těleso se skoro hladkou hranicí, $\Omega \supset M$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$, platí*

$$\int_{\operatorname{int} M} d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

[Bez důkazu]

Pozn.: Větu lze použít například pro kvádr (za M^* bereme sjednocení všech vrcholů, hran a stěn dimenze menší než $k-1$), useknutý kužel, apod.

Dále řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *kompaktní k-plocha se skoro hladkým krajem*, jestliže $S = \varphi(M)$ pro nějakou k-mapu $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ a těleso se skoro hladkou hranicí $M \subset U \subset \mathbb{R}^k$. Není těžké nahlédnout, že pro $S^* := \varphi(M^*)$ je $S \setminus S^*$ k-plocha s krajem a že její kraj má konečný plošný obsah. Budeme značit $\operatorname{int} S := \varphi(\operatorname{int} M)$ (vnitřek S, shodný s vnitřkem $S \setminus S^*$) a $\partial S := \partial(S \setminus S^*) \cup S^* = S \setminus \operatorname{int} S$ (kraj S), a integrál z diferenciální $(k-1)$-formy přes ∂S definujeme jako

$$\int_{\partial S} \omega := \int_{\partial(S \setminus S^*)} \omega.$$

Věta 2.15 (zobecněná Stokesova věta)**.** *Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní k-plocha se skoro hladkým krajem. Nechť $\Omega \supset S$ je otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$. Pak platí*

$$\int_{\operatorname{int} S} d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Věta plyne z předchozí (zobecněné Gaussovy) věty:

$$\int_{\operatorname{int} S} d\omega = \int_{\operatorname{int} M} \varphi^*(d\omega) = \int_{\operatorname{int} M} d(\varphi^*\omega) = \int_{\partial M} \varphi^*\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

3 Základy diferenciální geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$

3.1 Normála, první a druhá fundamentální forma plochy

Ve zbytku přednášky se budeme zabývat 2-plochami v R^3 třídy C^∞, budeme o nich hovořit stručně jako o plochách. *Orientace* plochy S je dána spojitým zobrazením $x \mapsto N(x)$, které bodu plochy přiřazuje jednotkový normálový vektor. Toto zobrazení

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

se nazývá *Gaussovo zobrazení.* Je-li $\varphi : U \to S$ mapa S (respektující orientaci S), pak

$$N(\varphi(u)) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u)}{\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \right\|}.$$

Připomeňme si definici diferenciálu zobrazení na ploše.

Lemma 3.1. *Gaussovo zobrazení je diferencovatelné a platí*

$$DN(x)(T_xS) \subset T_xS.$$

Důkaz. Je-li $\varphi : U \to S$ mapa a $x = \varphi(u)$, pak složené zobrazení $n := N \circ f$ je diferencovatelné, tedy i N je diferencovatelné v x podle definice. Derivováním rovnosti $\langle n(u), n(u)\rangle = 1$ dostaneme $\langle Dn(u)(\xi), n(u)\rangle = 0$ pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^2$, tedy $Dn(u)(\mathbb{R}^2) \subseteq T_xS$. Tvrzení pak plyne z toho, že $DN(x)(T_xS) = Dn(u)(\mathbb{R}^2)$ (podle definice diferenciálu na ploše). □

Definice 3.1. Buď S orientovaná plocha a $x \in S$.

1. Lineární zobrazení $L_x = -DN(x) : T_xS \to T_xS$ se nazývá *Weingartenovo zobrazení.*

2. Bilineární formy na T_xS

$$I_x(X, Y) := \langle X, Y\rangle,$$
$$II_x(X, Y) := \langle L_xX, Y\rangle, \quad X, Y \in T_xS,$$

se nazývají *první* a *druhá fundamentální forma* plochy S v bodě x. Je-li $\varphi : U \to S$ mapa taková, že $x = \varphi(u)$ pro $u \in U$, a označíme-li $n = N \circ \varphi$, pak vzory $I_x(\cdot, \cdot)$ a $II_x(\cdot, \cdot)$ při df_u značíme

$$g_u(\xi, \zeta) = I_u\big(d\varphi(u)(\xi), d\varphi(u)(\zeta)\big) = \langle D\varphi(u)(\xi), D\varphi(u)(\zeta)\rangle,$$
$$h_u(\xi, \zeta) = II_u\big(d\varphi(u)(\xi), d\varphi(u)(\zeta)\big) = -\langle Dn(u)(\xi), D\varphi(u)(\zeta)\rangle,$$

což jsou bilineární formy na $\mathbb{R}^2$ s maticemi

$$g_u = \left(\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\rangle\right)_{i,j=1}^2, \quad h_u = \left(-\left\langle \frac{\partial n}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\rangle\right)_{i,j=1}^2.$$

Pozn.: I_x i g_u jsou zřejmě symetrické pozitivně definitní bilineární formy (jedná se o restrikci skalárního součinu).

Věta 3.2. *h_u, a tedy i II_x, je symetrická bilineární forma.*

Důkaz. Z rovnosti $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u), n(u)\rangle = 0$ dostaneme derivováním

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u), n(u) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial n}{\partial u_j}(u) \right\rangle = 0,$$

z čehož plyne

$$h_u(e_1, e_j) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u), n(u) \right\rangle,$$

což je výraz symetrický v i, j. □

Pozn.: Z důkazu poslední věty je vidět, že matici druhé fundamentální formy lze vyjádřit ve tvaru

$$h_u = \left(\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u), n(u) \right\rangle \right)_{i,j=1}^{2}.$$

Cvičení: Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ orientovaná plocha s atlasem $\mathcal{A}$ a $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost, tedy afinní zobrazení $\rho : x \mapsto b + Rx$ s unitární maticí R, pak $\overline{S} := \rho(S)$ je orientovaná plocha s atlasem $\overline{\mathcal{A}} := \{\rho \circ \varphi : \varphi \in \mathcal{A}\}$ a její normála $\overline{N}$ a první a druhá fundamentání forma $\overline{g}, \overline{h}$ splňují:

$$\overline{N}(\rho(x)) = \sigma R N(x), \quad \overline{g}_u = g_u, \quad \overline{h}_u = \sigma h_u, \tag{2}$$

kde $\sigma = \det R \in \{-1, 1\}$.

Přednáška 29.4.2022

3.2 Hlavní směry a hlavní křivosti plochy

Připomeňme nejprve Frenetovy rovnce křivky $c : I \to \mathbb{R}^3$, které určují derivace vektorů tečny ($\mathbf{t}$), hlavní normály ($\mathbf{n}$) a binormály ($\mathbf{b}$) křivky v případě nenulové křivosti κ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \|c'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Mezi křivostí křivky na ploše a druhou fundamentální formou plochy ve směru tečny křivky platí následující důležitý vztah.

Věta 3.3. *Buď S orientovaná plocha a $c : I \to S$ křivka na ploše S parametrizovaná obloukem. Symboly $\mathbf{t}(s), \kappa(s)$ značíme vektor tečny a křivost křivky, $\mathbf{n}(s)$ je vektor hlavní normály v případě $\kappa(s) \neq 0$ v bodě $s \in I$. Pak platí*

$$I\!I_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)) = \kappa(s)\, \langle N(c(s)), \mathbf{n}(s) \rangle, \quad s \in I.$$

Pozn.: Je-li $\kappa(s) = 0$, výraz na pravé straně je roven nule a nevadí tedy, že vektor hlavní normály křivky není definován.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že existuje mapa $\varphi : U \to S$ plochy taková, že $c(I) \subset \varphi(U)$. Pak $u := \varphi^{-1} \circ c : I \to U$ je regulární parametrizovaná křivka taková, že $c = \varphi \circ u$ na I. Pro každé $s \in I$ platí

$$\begin{aligned} I\!I_{c(s)}(c'(s), c'(s)) &= h_{u(s)}(u'(s), u'(s)) \\ &= -\langle Dn(u(s))(u'(s)), D\varphi(u(s))(u'(s)) \rangle \\ &= -\langle (n \circ u)'(s), c'(s) \rangle \\ &= \langle (n \circ u)(s), c''(s) \rangle \\ &= \kappa(s)\, \langle N(c(s)), \mathbf{n}(s) \rangle, \end{aligned}$$

přitom čtvrtou rovnost dostaneme derivováním rovnosti $\langle (n \circ u), c' \rangle = 0$, a poslední rovnost plyne z Frenetových vzorců. □

Důsledkem je vztah známý jako Meusnierova věta:

Věta 3.4 (Meusnier)**.** *Nechť S a c jsou jako v předchozí větě a označme $\theta(s) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ úhel mezi normálou $N(c(s))$ k ploše a oskulační rovinou křivky c v bodě s. Pak*

$$|I\!I_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s))| = \kappa(s) \cos\theta(s), \quad s \in I.$$

Definice 3.2. S buď orientovaná plocha, $x \in S$, $0 \neq X \in T_xS$. Pak číslo

$$\kappa_n(X) = \frac{I\!I_x(X, X)}{I_x(X, X)}$$

nazveme *normálovou křivostí* plochy v bodě x a ve směru X.

Pozn.:

1. Zřejmě platí $\kappa_n(\alpha X) = \kappa_n(X)$ pro každé $\alpha \neq 0$, κ_n je tedy skutečně funkcí 'směru' $\langle X \rangle = \{\alpha X : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
2. Z Meusnierovy věty plyne, že $|\kappa_n(X)|$ je křivost křivky ležící v řezu plochy rovinou $x + \langle X, N(x) \rangle$ v bodě x.

Zvolme $x \in S$ pevně a označme

$$T_x^1 S = \{X \in T_x S : \|X\| = 1\}.$$

Funkci κ_n můžeme přirozeně chápat jako funkci na $T_x^1 S$; jako spojitá funkce na kompaktu zde musí nabývat minima a maxima.

Definice 3.3. $X \in T_x^1 S$ (resp. αX pro $\alpha \neq 0$) je *hlavním směrem* plochy S v bodě x, jestliže κ_n nabývá extrému v X. Hodnota $\kappa_n(X)$ se pak nazývá *hlavní křivostí* plochy v bodě x.

Pozn.: X je hlavní směr, právě když $-X$ je hlavní směr.

Hledání hlavních směrů a hlavních křivostí: Jedná se o úlohu na vázaný extrém

$$\min / \max\{II_x(X, X) : I_x(X, X) = 1\}.$$

Je-li $\varphi : U \to S$ mapa plochy s $\varphi(u) = x$, pak lze ekvivalentně úlohu převést na hledání extrému ($\xi \in \mathbb{R}^2$)

$$\min / \max\{h_u(\xi, \xi) : g_u(\xi, \xi) = 1\}.$$

Metodou Lagrangeových multiplikátorů se úloha převede na hledání nevázaného extrému funkce

$$\Lambda(\xi, \lambda) = h_u(\xi, \xi) - \lambda\big(g_u(\xi, \xi) - 1\big), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Funkce Λ je diferencovatelná, pokud tedy nabývá v (ξ, λ) extrému, musí platit

$$d\Lambda_{(\xi,\lambda)}(\eta, 0) = 2h_u(\xi, \eta) - 2\lambda g_u(\xi, \eta) = 0 \quad \text{pro všechna } \eta \in \mathbb{R}^2,$$

v maticovém zápisu

$$\eta^T(h_u - \lambda g_u)\xi = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Poslední podmínka nastane, právě když

$$(h_u - \lambda g_u)\xi = 0, \tag{3}$$

což může nastat jedině když

$$\det(h_u - \lambda g_u) = 0. \tag{4}$$

Všimněme si, že vektor ξ z (3) je hlavním směrem (resp. jeho obraz $D\varphi(u)\xi$), a hodnota λ z (3) nebo (4) je hlavní křivostí.

Věta 3.5. *Jsou-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dvě řešení* (4) *a ξ_1, ξ_2 odpovídající řešení* (3)*, platí $g_u(\xi_1, \xi_2) = 0$ (neboli hlavní směry odpovídající různým hlavním křivostem jsou vzájemně kolmé). Hlavní směry $X_i = D\varphi(u)\xi_i$ jsou vlastními vektory Weingartenova zobrazení L_x s vlastními čísly λ_i:*

$$L_x(X_i) = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2.$$

Hodnoty λ_i jsou extremálními hodnotami normálové křivosti ve směrech X_i.

Důkaz. Odečtením rovnic (důsledek (3))

$$\begin{aligned} \xi_2^T(h_u - \lambda_1 g_u)\xi_1 &= 0, \\ \xi_1^T(h_u - \lambda_2 g_u)\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z (3) dále odvodíme

$$II_x(X_i, Y) = \lambda_i I_x(X_i, Y), \quad Y \in T_x S,$$

z čehož plyne $L_x X_i = \lambda_i X_i$ a $\kappa_n(X_i, X_i) = \lambda_i$. □

Mohou nastat tyto případy:

1. Rovnice (4) má jediné řešení λ_1, pak $\lambda_1 = \kappa_n(X)$ pro všechna $X \in T_x^1 S$ (každý směr je hlavním směrem):
   (a) $\lambda_1 = 0$, x je *planární bod* plochy,
   (b) $\lambda_1 \neq 0$, x je *kruhový bod* plochy.
2. Rovnice (4) má dvě řešení $\lambda_1 < \lambda_2$, odpovídající hlavní směry X_1, X_2 ($X_i = D\varphi(u)\xi_i$) jsou navzájem kolmé:
   (a) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, x je *eliptický bod* plochy,
   (b) $\lambda_1\lambda_2 = 0$, x je *parabolický bod* plochy,
   (c) $\lambda_1\lambda_2 < 0$, x je *hyperbolický bod* plochy.

Definice 3.4. Funkce $K(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)$ se nazývá *Gaussova křivost* a $H(x) = \frac{\lambda_1(x)+\lambda_2(x)}{2}$ *střední křivost* plochy. (Je-li jediná hlavní křivost, klademe $\lambda_2 = \lambda_1$.)

Věta 3.6. *Je-li $\varphi : U \to S$ mapa a $\varphi(u) = x$, pak*

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{\det h_u}{\det g_u}, && (5) \\ H(x) &= \frac{g_u^{11}h_u^{22} + g_u^{22}h_u^{11} - 2g_u^{12}h_u^{12}}{2\det g_u} && (6) \end{aligned}$$

(g_u^{ij}, h_u^{ij} značí prvky matic g_u, h_u).

Důkaz: Vzorce se odvodí přímo z (4).

Důsledek: K, H jsou diferencovatelné funkce na ploše S.

Lemma 3.7. *Je-li $\lambda_1(x_0)) \neq \lambda_2(x_0)$, pak existuje okolí V bodu x_0 a funkce λ_1, λ_2 diferencovatelné na $S \cap V$ takové, že $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ jsou hlavní křivosti plochy v bodě x pro každý $x \in S \cap V$.*

Důkaz. Zvolme mapu $\varphi : U \to S$ s $\varphi(u_0) = x_0$. Aplikujeme větu o implicitních funkcích pro funkci

$$\Phi(\lambda, u) = \lambda^2 - 2H(\varphi(u))\lambda + K(\varphi(u)) = 0$$

v bodech $(\lambda_1(x_0), u_0)$ a $(\lambda_2(x_0), u_0)$ Podmínka $\lambda_1(u_0) \neq \lambda_2(u_0)$ zaručuje, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda_i(x_0), u_0) = 2(\lambda_i(x_0) - H(\varphi(u_0))) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

□

3.2.1 Hlavní a asymptotické křivky

(probráno na cvičení)

Definice 3.5. Buď S orientovaná plocha.

1. Regulární parametrizovaná křivka $c : I \to S$ na ploše S je *hlavní křivkou*, jestliže $c'(t)$ je hlavním směrem pro každé $t \in I$.

2. Nenulový vektor $X \in T_xS$ je *asymptotickým směrem* na ploše S v bodě x, jestliže $II_x(X, X) = 0$.

3. Regulární parametrizovaná křivka $c : I \to S$ na ploše S je *asymptotickou křivkou*, jestliže $c'(t)$ je asymptotickým směrem pro každé $t \in I$.

Tvrzení 3.8. *Buď S plocha a $x \in S$.*

1. *Je-li $K(x) > 0$, neexistuje v x žádný asymptotický směr.*

2. *Je-li $K(x) < 0$, existují v x právě dva různé asymptotické směry.*

3. *Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) \neq \lambda_2(x)$, existuje v x právě jeden asymptotický směr, který je zároveň hlavním směrem.*

4. *Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) = \lambda_2(x)$, je v x každý směr asymptotický.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definic. Využívá faktu, že normálová křivost nabývá na jednotkové kružnici nejvýše dvou lokálních extrémů ve dvou na sebe kolmých směrech. □

Věta 3.9. *Buď $\varphi : U \to S$ mapa plochy S. Regulární parametrizovaná křivka $c(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in I$, na ploše S je* (7) *hlavní,* (8) *asymptotická, právě tehdy, když vyhovuje rovnici*

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g^{11} & g^{12} & g^{22} \\ h^{11} & h^{12} & h^{22} \end{pmatrix} = 0, \tag{7}$$

$$h^{11}(u')^2 + 2h^{12}u'v' + h^{22}(v')^2 = 0. \tag{8}$$

Důkaz. Pro hlavní křivku využijeme rovnice (3), z níž plyne, že c je hlavní křivka právě tehdy, když pro každé t jsou vektory $g\xi$ a $h\xi$ lineárně závislé, kde $g = g_{u(t),v(t)}$ a $\xi = (u'(t), v'(t))^T$. Toto je dále ekvivalentní vztahu

$$0 = \det(g\xi, h\xi) = \det \begin{pmatrix} g^{11}u' + g^{12}v', & h^{11}u' + h^{12}v', \\ g^{12}u' + g^{22}v', & h^{12}u' + h^{22}v' \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

což je stejná rovnice, jako v (7). Ekvivalence pro asymptotickou křivku plyne přímo z definice. □

Přednáška 6.5.2022

3.3 Geodetiky na ploše

Tvrzení 3.10 (Délka křivky na ploše)**.** *Je-li $c : I \to S$ regulární křivka na ploše S, pak její délka je rovna*

$$L(c) = \int_I \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

Je-li $\varphi : U \to S$ mapa S a $c = \varphi \circ u$, pak

$$L(c) = \int_I \sqrt{g_{u(t)}(u'(t), u'(t))}\, dt.$$

Důkaz. Vzorce plynou přímo ze vztahu $L(c) = \int_I \|c'(t)\|\, dt$ a z definice první fundamentální formy plochy. □

Motivace pro definici geodetik. Mějme orientovanou plochu S a regulární parametrizovanou křivku $c : I \to S$ na ploše S. Hledáme podmínky zaručující, že křivka c spojuje nejkratším možným způsobem libovolné své dva různé dostatečně blízké body. Pozměníme málo křivku c na okolí nějakého bodu $x = c(t)$ výchylkou ve směru tečném k ploše a kolmém k tečně křivky:

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon\alpha(t)(c'(t) \times N(c(t))),$$

kde $N(t) = n(u(t))$, $\varepsilon > 0$ malé a $\alpha(t)$ je libovolná nezáporná diferencovatelná funkce. Délka části křivky c_ε je $\int_I \|c'_\varepsilon\|$. Chceme, aby tato délka byla minimální pro $\varepsilon = 0$ při libovolné volbě funkce α, což znamená podmínku

$$\frac{d}{d\varepsilon}\|c'_\varepsilon\|\Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

$\alpha \geq 0$ libovolná. Máme

$$c'_\varepsilon = c' + \varepsilon\alpha'(c' \times (N \circ c)) + \varepsilon\alpha(c'' \times (N \circ c)) + \varepsilon\alpha(c' \times (N \circ c)'),$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\|c'_\varepsilon\|\Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{c' \cdot \Big(\alpha'(c' \times (N \circ c)) + \alpha(c'' \times (N \circ c)) + \alpha(c' \times (N \circ c)')\Big)}{\|c'\|} \\ &= \frac{\alpha}{\|c'\|}\det(c', c'', N \circ c). \end{aligned}$$

Poslední výraz je roven 0 pro libovolnou α, právě když jsou vektory $c', c'', N \circ c$ lineárně závislé.

Definice 3.6. Regulární křivka $c : I \to S$ na ploše S se nazývá *geodetikou*, jestliže

$$\det(c'(t), c''(t), N(c(t))) = 0 \text{ pro každé } t \in I.$$

Pozn.: Vlastnost křivky 'být geodetikou na ploše' je zřejmě invariantní vůči změně parametrů křivky i plochy.

Příklady

1. V rovině jsou geodetiky právě všechny přímky.
2. Na sféře $\{x^2+y^2+z^2=r^2\}$ jsou geodetiky (právě) všechny hlavní kružnice, tj. kružnice maximálního poloměru r.
3. Část přímky je geodetikou na libovolné ploše.
4. Na válcové ploše $\{x^2+y^2=1\}$ parametrizované mapou
$$f(u,v) = (\cos u, \sin u, v)^T$$
jsou geodetiky 'spirály' parametrizované např. $u = \alpha_1 t + \beta_1$, $v = \alpha_2 t + \beta_2$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ (tyto křivky odpovídají přímkám po 'rozbalení' plochy do roviny).

Věta 3.11. *Buď S plocha a $x \in S$. Pak existuje okolí V bodu x tak, že každá geodetika $c : I \to S \cap V$ na ploše S je nejkratší spojnicí na ploše libovolných dvou svých bodů (jinými slovy, délka libovolné křivky na ploše spojující dva body $c(a), c(b)$, $a, b \in I$, je větší nebo rovna délce geodetiky $c \mid [a,b]$ a rovnost nastává pouze v případě, kdy obrazy obou křivek splývají).*

[Bez důkazu]

Poznámka: Věta skutečně platí jen lokálně: z příkladu válcové plochy je zřejmé, že libovolné dva její body, které neleží na společné 'rovnoběžce' (kružnici kolmé k ose válce), lze spojit nekonečně mnoha geodetickými křivkami ('spirálami') libovolně velké délky.

Definice 3.7. Buď S orientovaná plocha a $c : I \to S$ regulární křivka na ploše S. *Geodetickou křivost* křivky c definujeme předpisem
$$\kappa_g(t) = \frac{\det\Big(c'(t), c''(t), N(c(t))\Big)}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Poznámky:

1. Není těžké ověřit, že absolutní hodnota geodetické křivosti nezávisí na parametrizaci křivky. Znaménko geodetické křivosti lze změnit změnou orientace jak křivky, tak plochy.
2. Z definice je zřejmé, že křivka c je geodetikou, právě když její geodetická křivost je nulová.

Věta 3.12. *Pro křivku $c : I \to S$ na ploše S platí*

$$|\kappa_g(t)| = \kappa(t)\sin\theta(t), \quad t \in I,$$

kde $\kappa(t)$ je křivost křivky c v $\mathbb{R}^3$ a $\theta(t) \in [0, \pi/2]$ je úhel mezi normálou plochy a oskulační rovinou křivky v neinflexním bodě t křivky.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že křivka je parametrizovaná obloukem. Z definice geodetické křivosti a z Frenetových vzorců pro křivku dostaneme

$$\begin{aligned}
|\kappa_g(s)| &= |\det(c'(s), c''(s), N(c(s)))| \\
&= |\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), N(c(s)))| \\
&= \kappa(s)|\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), N(c(s)))| \\
&= \kappa(s)|\langle \mathbf{b}(s), N(c(s))\rangle| \\
&= \kappa(s)\sin\theta(s).
\end{aligned}$$

□

Využijeme-li Meusnierovu větu (Důsledek 3.4) a nezávislost křivostí na parametrizaci, dostáváme

Důsledek 3.13. *Pro regulární křivku $c : I \to S$ na ploše S platí následující vztah mezi obyčejnou a geodetickou křivostí křivky a normálovou křivostí plochy:*

$$\kappa^2(t) = \kappa_n^2(c'(t)) + \kappa_g^2(t), \quad t \in I.$$

Definice 3.8. Křivka $c : I \to S$ na ploše S je *parametrizovaná geodetika*, jestliže je geodetika a navíc platí $\|c'(t)\|$ =konst. na I.

Pozn.: Zřejmě $c : I \to S$ je parametrizovaná geodetika právě tehdy, když pro každé t je vektor $c''(t)$ násobkem normálového vektoru $N(c(t))$ plochy.

Definice 3.9 (Christoffelovy symboly plochy)**.** Buď $\varphi : U \to S$ mapa plochy S a pišme stručně $\varphi_i := \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$, $\varphi_{ij} := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}$, $i, j = 1, 2$. Vektory $\{\varphi_1(u), \varphi_2(u), n(u)\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ pro libovolné $u \in U$ a můžeme vyjádřit vektory $\varphi_{ij}(u)$ vzhledem k této bázi:

$$\varphi_{ij}(u) = \Gamma_{ij}^1(u)\varphi_1(u) + \Gamma_{ij}^2(u)\varphi_2(u) + h_u^{ij} n(u). \tag{9}$$

Koeficienty $\Gamma_{ij}^k(u)$ v tomto rozkladu se nazývají *Christoffelovy symboly plochy* v bodě u $(i, j, k = 1, 2)$.

Pozn.: Koeficienty h_u^{ij} v rozkladu (9) jsou příslušné koeficienty matice h_u druhé fundamentální formy plochy, což plyne z rovnosti $\langle \varphi_{ij}(u), n(u)\rangle = h_u^{ij}$.

Rovnice pro parametrizované geodetiky Pro křivku $c = \varphi \circ u : I \to S$ na ploše S platí

$$c'(t) = u_1'(t)\varphi_1(u(t)) + u_2'(t)\varphi_2(u(t))$$

a pro druhou derivaci dostaneme

$$\begin{aligned} c'' &= \sum_i u_i''\varphi_i + \sum_i \sum_j u_i' u_j' \varphi_{ij} \\ &= \sum_i u_i''\varphi_i + \sum_i \sum_j u_i' u_j' (\Gamma_{ij}^1 \varphi_1 + \Gamma_{ij}^2 \varphi_2 + h^{ij} n) \\ &= \sum_k \left(u_k'' + \sum_i \sum_j u_i' u_j' \Gamma_{ij}^k \right) \varphi_k + \sum_i \sum_j h^{ij} n. \end{aligned}$$

Aby c byla parametrizovaná geodetika, musí být koeficienty u φ_k v posledním vyjádření nulové. Tím jsme odvodili následující větu.

Věta 3.14 (Rovnice pro geodetiky)**.** *Křivka $c = \varphi \circ u : I \to S$ na ploše S s mapou φ je parametrizovaná geodetika právě tehdy, když*

$$\begin{aligned} u_1'' + \sum_i \sum_j u_i' u_j' \Gamma_{ij}^1 &= 0, \\ u_2'' + \sum_i \sum_j u_i' u_j' \Gamma_{ij}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Výše uvedená soustava je soustavou lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu pro dvojici funkcí $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ a z teorie takovýchto rovnic plyne:

Věta 3.15. *Buď S plocha a $x \in S$. Ke každému vektoru $0 \neq X \in T_xS$ existuje právě jedna parametrizovaná geodetika $c : I \to S$ taková, že $c(0) = x$ a $c'(0) = X$.*

Přednáška 13.5.2022

3.4 Riemannova geometrie

Dosud jsme studovali plochy v $\mathbb{R}^3$, jejichž geometrie byla dána polohou v trojrozměrném prostoru. Metrické vlastnosti plochy vyplývaly z první fundamentální formy, která je dána jako restrikce euklidovského skalárního součinu do tečné roviny v daném bodě.

Riemannova geometrie je zobecněním v tom smyslu, že první fundamentální formu v bodě definujeme předpisem, bez ohledu na vnoření plochy do většího prostoru. V této kapitole budeme nadále vycházet z množiny bodů tvořící plochu v $\mathbb{R}^3$, i když obecný přístup připouští mnohem obecnější struktury.

Definice 3.10. Nechť S je plocha v $\mathbb{R}^3$. *Riemannovou metrikou* na S rozumíme zobrazení

$$g : x \mapsto g_x, \quad x \in S,$$

kde g_x je symetrická pozitivně definitní bilineární forma na tečném prostoru T_xS, které je navíc hladké v tom smyslu, že pro každou mapu $\varphi : U \to S$ plochy S je zobrazení

$$u \mapsto g_{\varphi(u)}(d\varphi_u(\cdot), d\varphi_u(\cdot)), \quad u \in U,$$

diferencovatelným zobrazením z U do množiny pozitivně definitiních bilineárních forem na $\mathbb{R}^2$. Dvojici (S, g) nazveme *Riemannovou plochou.*

Příklady: Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha, pak (S, I) je Riemannova plocha (I znaší první fundamentální formu na S). Je-li $\varphi : U \to S$ mapa plochy S, pak (U, g) je Riemannova plocha (zde g je opět první fundamentální forma). V těchto případech hovoříme o ploše vnořené v $\mathbb{R}^3$ (její metrika je odvozená z eukleidovské metriky v $\mathbb{R}^3$).

Definice 3.11. Buď (S, g) Riemannova plocha.

1. Je-li $c : I \to S$ křivka na S, její *délku* definujeme jako

$$L(c) := \int_I \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

2. Je-li $B \subset S$ borelovská množina, pak její *plošný obsah* definujeme jako

$$\mu_S(B) := \int_B \sqrt{\det g_x}\, dS.$$

3. Je-li $x \in X$, pak *úhel* tečných vektorů $0 \neq X, Y \in T_xS$ definujeme jako

$$\angle(X, Y) := \arccos \frac{g_x(X, Y)}{\sqrt{g_x(X, X)}\sqrt{g_x(Y, Y)}}.$$

Pozn.: V případě plochy vnořené v $\mathbb{R}^3$ tyto metrické charakteristiky odpovídají eukleidovským.

Nyní budeme uvažovat C^∞ diferencovatelné zobrazení $\Phi : (S_1, g_1) \to (S_2, g_2)$ mezi dvěma Riemannovými plochami. Připomeňme, že podle definice musí být složení $\Phi \circ \varphi$ třídy C^∞ pro každou mapu $\varphi : U \to S_1$.

Cvičení: Ukažte, že pro zobrazení Φ popsané výše platí

$$D\Phi(x)(T_x S_1) \subset T_{\Phi(x)} S_2, \quad x \in S_1.$$

Definice 3.12. Buďte (S_1, g_1) a $S_2, g_2)$ Riemannovy plochy.

1. Zobrazení $\Phi : S_1 \to S_2$ je *difeomorfismus*, jestliže Φ je bijekce a Φ i Φ^{-1} jsou třídy C^∞. Pak pro každé $x \in S_1$ je

$$d\Phi(x) : T_x S_1 \to T_{\Phi(x)} S_2$$

   bijekce tečných prostorů obou ploch (zde $d\Phi(x)$ je totéž zobrazení, jako $D\Phi(x)$, jen uvažujeme menší obor hodnot).

2. Difeomorfismus $\Phi : S_1 \to S_2$ je *izometrie*, jestliže Φ zachovává délku křivek (tedy $L(c) = L(\Phi \circ c)$ pro každou křivku $c : I \to S_1$).

3. Difeomorfismus $\Phi : S_1 \to S_2$ je *konformní*, jestliže Φ zachovává úhly (tedy $\angle(X, Y) = \angle(d\Phi(x)X, d\Phi(x)Y)$, kdykoliv $x \in S_1$ a $0 \neq X, Y \in T_x S$).

Věta 3.16. *Buď $\Phi : (S_1, g_1) \to (S_2, g_2)$ difeomorfismus mezi dvěma Riemannovými plochami.*

1. Φ je izometrie právě tehdy, když pro všechny body $x \in S_1$ platí

$$(g_1)_x(X, Y) = (g_2)_{\Phi(x)}(d\Phi(x)X, d\Phi(x)Y), \quad X, Y \in T_x S_1.$$

2. Φ je konformní právě tehdy, když pro všechny body $x \in S_1$ existuje $c(x) > 0$ takové, že platí

$$(g_1)_x(X, Y) = c(x)(g_2)_{\Phi(x)}(d\Phi(x)X, d\Phi(x)Y), \quad 0 \neq X, Y \in T_x S_1.$$

Důkaz. Dokážeme pouze první tvrzení (důkaz druhého by byl podobný).

$\Longleftarrow$. Pokud $(g_1)_x(X, Y) = (g_2)_{\Phi(x)}(d\Phi(x)X, d\Phi(x)Y)$ kdykoliv $x \in S_1$ a $X, Y \in T_x S_1$ a $c : I \to S_1$ je křivka na S_1, pak

$$\begin{aligned}
L(\Phi \circ c) &= \int_I \sqrt{(g_2)_{\Phi(c(t))}((\Phi \circ c)'(t), (\Phi \circ c)'(t))}\, dt \\
&= \int_I \sqrt{(g_2)_{\Phi(c(t))}(D\Phi(c(t))c'(t), D\Phi(c(t))c'(t))}\, dt \\
&= \int_I \sqrt{(g_1)_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt \\
&= L(c).
\end{aligned}$$

(Využili jsme rovnosti $(\Phi \circ c)'(t) = D\Phi(c(t))c'(t)$, která plyne z definice diferenciálu na ploše.)

$\Longrightarrow$. Nechť naopak existuje $x \in S_1$ a $0 \neq X, Y \in T_x S_1$ takové, že $(g_1)_x(X,Y) \neq (g_2)_{\Phi(x)}(d\Phi(x)X, d\Phi(x)Y)$. Protože každá pozitivně definitní bilineární forma je jednoznačně určena příslušnou kvadratickou formou, musí existovat $0 \neq X \in T_x S_1$ takový, že $(g_1)_x(X,X) \neq (g_2)_{\Phi(x)}(d\Phi(x)X, d\Phi(x)X)$. Nechť například

$$(g_1)_x(X,X) < (g_2)_{\Phi(x)}(d\Phi(x)X, d\Phi(x)X).$$

Nechť $c : I \to S_1$ je křivka taková, že $c(0) = x$ a $c'(0) = X$. Ze spojitosti Riemannovy metriky plyne existence $\delta > 0$ takového, že

$$(g_1)_{c(t)}(c'(t), c'(t)) < (g_2)_{\Phi(c(t))}(d\Phi(c(t))c'(t), d\Phi(c(t))c'(t)), \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Pak ovšem pro restrikci $\bar{c} := c|(-\delta, \delta)$ dostaneme

$$L(\bar{c}) < L(\Phi \circ \bar{c}).$$

$\square$

Definice 3.13. Na ploše

$$H_2 := \{-x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$$

(horní list dvoudílného hyperboloidu) je dána Riemannova metrika

$$g^{(H_2)}_{(x,y,z)}((X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)) = X_1X_2 + Y_1Y_2 - Z_1Z_2,$$

$(X_i, Y_i, Z_i) \in T_{(x,y,z)}H_2$, $i = 1, 2$.

Cvičení: Ověřte, že $g^{(H_2)}_{(x,y,z)}$ je pozitivně definitní bilineární forma na $T_{(x,y,z)}H_2$ pro každý bod $(x, y, z) \in H_2$.

Definici plochy v $\mathbb{R}^3$ vyhovuje i otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$, jak tomu bude v následujících dvou příkladech.

Definice 3.14. Množina

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 :\ u^2 + v^2 < 1\}$$

s Riemannovou metrikou

$$g^{(U)}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 4(1 - u^2 - v^2)^{-2} & 0 \\ 0 & 4(1 - u^2 - v^2)^{-2} \end{pmatrix}$$

(bilineární forma na $\mathbb{R}^2$ je reprezentována maticí) se nazývá *Poincarého model hyperbolické geometrie.*

Věta 3.17. *Zobrazení $\Phi : U \to H_2$ dané předpisem*

$$\Phi : (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2} \right)$$

je izometrie.

Pozn.: Zobrazení Φ je stereografická projekce z bodu $(0,0,-1)$, tedy trojice bodů $(0,0,-1)$, $(u,v,0)$ a $\Phi(u,v) \in H_2$ leží na přímce.

Důkaz. Parciální derivace Φ jsou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(1+u^2-v^2, 2uv, 2u),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(2uv, 1-u^2+v^2, 2v),$$

a tedy

$$g^{(H_2)}_{\Phi(u,v)}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2} = g^{(U)}_{(u,v)}(e_1, e_1),$$
$$g^{(H_2)}_{\Phi(u,v)}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2} = g^{(U)}_{(u,v)}(e_2, e_2),$$
$$g^{(H_2)}_{\Phi(u,v)}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = 0 = g^{(U)}_{(u,v)}(e_1, e_2),$$

tedy Φ je izometrie. $\square$

Komplexní funkce komplexní proměnné

$$\Psi : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

zobrazuje "horní polorovinu"

$$H_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y > 0\}$$

na jednotkový kruh U. Najdeme Riemannovu metriku na H_+ tak, aby Ψ bylo izometrií. Na Ψ můžeme nahlížet buď jako na funkci jedné komplexní proměnné $z = x + iy$, nebo jako na funkci dvou proměnných x, y. Protože Ψ má derivaci v komplexní proměnné, $\Psi'(z) = 2i/(z+i)^2$, platí Cauchy-Riemannův vztah

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x+iy) = (-i)\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x+iy),$$

tedy vektory parciálních derivací $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ jsou stejně velké a vzájemně kolmé. Máme tedy

$$g^{(U)}_{\Psi(z)}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}(z), \frac{\partial \Psi}{\partial y}(z)\right) = 0$$

a

$$
\begin{aligned}
g^{(U)}_{\Psi(z)}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}(z), \frac{\partial\Psi}{\partial x}(z)\right) &= g^{(U)}_{\Psi(z)}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}(z), \frac{\partial\Psi}{\partial y}(z)\right) \\
&= \frac{4}{(1-|\Psi(z)|^2)^2}|\Psi'(z)|^2 \\
&= \frac{4}{\left(1-\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2\right)^2}\left|\frac{2i}{(z+i)^2}\right|^2 \\
&= y^{-2}.
\end{aligned}
$$

Definice 3.15. Polorovina H_+ s Riemannovou metrikou

$$
g^{(H_+)}_{x,y} = \begin{pmatrix} y^{-2} & 0 \\ 0 & y^{-2} \end{pmatrix}
$$

se nazývá *polorovinový model hyperbolické geometrie.*

Z výše uvedených výpočtů pak plyne

Věta 3.18. *Zobrazení $\Psi : H_+ \to U$ je izometrie.*

Výše uvedené tři Riemannovy geometrie jsou tedy vlastně tři různé modely jedné a téže geometrie, nazávané *hyperbolická geometrie.* Umíme v těchto modelech měřit délku křivek, úhel křivek nebo velikost plošného obsahu. V následující kapitole uvidíme, jak lze v Riemannově geometrii definovat Gaussovu křivost a co jsou zde geodetiky (ty jsme si na plochách v $\mathbb{R}^3$ definovali pomocí normály, kterou zde nemáme k dispozici).

Doplňky ze cvičení

Věta 3.19. *Zobrazení tvaru*

$$
\phi : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc = 1, \tag{10}
$$

jsou izometrie H_+ na H_+.

Důkaz. Opět využijeme derivování podle komplexní proměnné. Platí

$$
\phi'(z) = (cz+d)^{-2} \text{ a } \operatorname{im}\phi(z) = y|cz+d|^{-2},
$$

tedy podobně jako pro zobrazení Ψ výše dostaneme

$$
g^{(H_+)}_{\phi(z)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = 0,
$$

$$
g^{(H_+)}_{\phi(z)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = g^{(H_+)}_{\phi(z)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = (\operatorname{im}\phi(z))^{-2}|\phi'(z)|^2 = y^{-2},
$$

ϕ je tedy skutečně izometrie. $\square$

Tvrzení 3.20. *Pro $x \in \mathbb{R}$ a $0 < y_1 < y_2$ je úsečka*

$$t \mapsto (x, t), \quad y_1 < t < y_2,$$

nejkratší spojnicí bodů (x, y_1) a (x, y_2) v hyperbolickém modelu H_+.

Důkaz. Buď $c(s) = (x(s), y(s))$, $s \in (a, b)$, křivka v H_+ parametrizovaná obloukem a taková, že $x(a) = x(b) = x$ a $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$. Předpokládejme, že $y'(s) > 0$, $s \in (a, b)$. Pro délku křivky c (s využitím substituce $y = y(s)$) dostaneme

$$L(c) = \int_a^b \frac{1}{y(s)}\, ds = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} \frac{dy}{y'(s)} \geq \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y}\, dy,$$

neboť zřejmě $y'(s) \leq 1$. Poslední výraz je délka úsečky $t \mapsto (x, t)$, $y_1 < t < y_2$, délka úsečky c je tedy větší nebo rovna. Neplatí-li předpoklad $y' > 0$, rozdělíme úsečku na úseky s rostoucí či klesající y-ovou souřadnicí a jednoduchou úvahou usoudíme, že délka křivky nemůže být menší. $\square$

Tvrzení 3.21. *Izometrie* (10) *zobrazují polopřímku $x = 0, y > 0$ na polopřímky $x = x_0, y > 0$, nebo na půlkružnice se středem na ose x.*

Návod k důkazu: Je-li $c = 0$ nebo $d = 0$, obrazem polořímky $x = 0, y > 0$ bude polopřímka posunutá ve směru osy x. Je-li $c \neq 0$ a $d \neq 0$, lze přímým výpočtem ukázat, že

$$\left| \frac{ayi + b}{cyi + d} - p \right|^2 = r^2$$

pro $p = (ad + bc)/(2cd)$ a $r = 1/(2|cd|)$, tedy obrazem polopřímky $x = 0, y > 0$ je půlkružnice se středem p (ležícím na ose x) a poloměrem r. $\square$

Důsledek 3.22. *Polopřímky rovnoběžné s osou y a půlkružnice se středem na ose x jsou nejkratšími spojnicemi svých bodů.*

Pozn.: Výše uvedeným křivkám (které jsou geodetikami ve smyslu definice z následující kapitoly) odpovídají v modelu U kružnice protínající hraniční kružnici U pod pravým úhlem, v modelu H_2 řezy s rovinami procházejícími počátkem.

Přednáška 20.5.2022

3.5 Vnitřní vlastnosti plochy, Theorema Egregium

Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ orientovaná plocha. Jejími *vnitřními vlastnostmi* rozumíme vlastnosti dané její první fundamentální formou. Všechny vnitřní vlastnosti se tedy zachovávají při izometrickém zobrazení a lze je přenést i do kontextu Riemannovy geometrie. Ne všechny charakteristiky plochy jsou však vnitřní, například Gaussovo zobrazení $x \mapsto N(x)$ není dáno první fundamentální formou.

V celé kapitole bude dána mapa plochy S, $\varphi : U \to S$. Budeme používat jako v předchozí kapitole úsporné značení parciálních derivací pomocí dolních indexů (tedy např. $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$, $\varphi_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}$). $n_i = \frac{\partial n}{\partial u^i}$, $i, j = 1, 2$, a tak podobně. Podobně jako dříve budeme značit g^{ij}, h^{ij} koeficienty matic první a druhé fundamentální formy g, h a a^{ij} budou koeficienty inverzní matice $a = g^{-1}$, $i, j = 1, 2$.

Tvrzení 3.23. *Pro $i, j, k = 1, 2$ platí*

$$\begin{aligned} n_i &= -\sum_k \sum_l h^{il} a^{lk} \varphi_j, \\ \Gamma^k_{ij} &= \sum_l a^{kl} \langle \varphi_{ij}, \varphi_l \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_l a^{kl} (g^{il}_j + g^{jl}_i - g^{ij}_l). \end{aligned}$$

Důkaz. První rovnost se ověří skalárním násobením obou stran vektory φ_1, φ_2, n. Podobně při důkazu druhé rovnosti násobíme obě strany rovnice (9) skalárně φ_1, φ_2. Poslední rovnost ověříme dosazením za derivace g^{ij}_k. $\square$

Důsledek 3.24. *Christoffelovy symboly jsou vnitři charakteristiky plochy. Být geodetikou na ploše je vnitřní vlastností plochy. Geodetiky jsou tedy (pomocí diferenciálních rovnic) definovány i v Riemannově ploše.*

Podle předpokladu je φ diferencovatelné zobrazení, má tedy záměnné smíšené parciální derivace třetího řádu

$$\varphi_{ijk} = \varphi_{ikj}, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Upravíme-li tento vztah s využitím Cristoffelových symbolů, dostaneme

$$\sum_l \left(\Gamma^l_{ij,k} \varphi_l + \Gamma^l_{ij} \varphi_{lk} \right) + h^{ij}_k n + h^{ij} n_k = \sum_l \left(\Gamma^l_{ik,j} \varphi_l + \Gamma^l_{ik} \varphi_{lj} \right) + h^{ik}_j n + h^{ik} n_j.$$

Dosadíme-li opět vyjádření φ_{ij} a n_i, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \sum_l \left(\Gamma^l_{ij,k} - \Gamma^l_{ik,j} \right) \varphi_l + \left(h^{ij}_k - h^{ik}_j \right) n \\ + \quad & \sum_l \Gamma^l_{ij} \Big(\sum_m \Gamma^m_{lk} \varphi_m + h^{lk} n \Big) - \sum_l \Gamma^l_{ik} \Big(\sum_m \Gamma^m_{lj} \varphi_m + h^{lj} n \Big) \\ - \quad & h^{ij} \sum_l \sum_m h^{kl} a^{lm} \varphi_m + h^{ik} \sum_l \sum_m h^{jl} a^{lm} \varphi_m. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u φ_m a n dostaneme následující rovnice.

Věta 3.25. *Pro $i, j, k, m = 1, 2$ platí vztahy*

$$\Gamma^m_{ij,k} - \Gamma^m_{ik,j} + \sum_l \left(\Gamma^l_{ij} \Gamma^m_{lk} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lj} \right) = \sum_l a^{lm} \big(h^{ij} h^{kl} - h^{ik} h^{jl} \big) \tag{11}$$

(Gaussova rovnice) a

$$\sum_l \left(\Gamma^l_{ij} h^{lk} - \Gamma^l_{ik} h^{lj} \right) + h^{ij}_k - h^{ik}_j = 0 \tag{12}$$

(Codazzi-Mainardiho rovnice).

Dosadíme-li do pravé strany Gaussovy rovnice (11) hodnoty $i = j = 1$ a $k = m = 2$, dostaneme

$$\sum_l a^{l2} \big(h^{11} h^{2l} - h^{12} h^{1l} \big) = a^{22} \det h = g^{11} \frac{\det h}{\det g} = g^{11} K,$$

kde K je Gaussova křivost plochy v daném bodě. Jako důsledek tohoto pozorování dostáváme slavnou Gaussovu větu.

Věta 3.26 (Theorema Egregium)**.** *Pro Gaussovu křivost parametrizované plochy platí*

$$K = (g^{11})^{-1} \left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \sum_l \left(\Gamma^l_{11} \Gamma^2_{l2} - \Gamma^l_{12} \Gamma^2_{l1} \right) \right).$$

Speciálně tedy Gaussova křivost je funkcí první fundamentální formy, čili je vnitřní vlastností plochy.

Důsledek 3.27. *Izometrické plochy mají v odpovídajících bodech stejnou Gaussovu křivost.*

V případě nulové křivosti platí i obrácená implikace:

Věta 3.28. *Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha, jejíž Gaussova křivost je identicky rovna 0 na S. Pak ke každému $x \in S$ existuje okolí V tak, že $S \cap V$ je izometrická části roviny.*

(bez důkazu)

Příklad V modelu hyperbolicé geometrie H_+ spočteme Christoffelovy symboly:

$$\Gamma^1_{11} = 0, \, \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}, \, \Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y}, \, \Gamma^2_{12} = 0, \, \Gamma^1_{22} = 0, \, \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}.$$

Rovnice pro parametrizované geodetiky mají tedy tvar

$$\begin{aligned} x'' - \frac{2}{y} x' y' &= 0, \\ y'' + \frac{1}{y}(x'^2 - y'^2) &= 0. \end{aligned}$$

Gaussova křivost vychází

$$K(x, y) = -1, \quad (x, y) \in H_+.$$