"Vzorová zkouška Lie Alg., 2020"

① Definujte pojem podgrupy Lieovy grupy, pojem uzavřené podgrupy a pojem 1-parametrické podgrupy. Pro libovolné $X, Y \in \mathfrak{g}$ (Lie algebra) spočtěte $U, V, W \in \mathfrak{g}$ tak, aby platilo

$$\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) =$$
$$\exp\left(U + tV + t^2 W + O(t^3)\right), \ t \in \mathbb{R}.$$

② Definujme lineární zobrazení $i: sl(2,\mathbb{C}) \to sl(3,\mathbb{C})$ předpisem

$$X \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: i(X)$$

$$Y \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: i(Y)$$

pro $sl(2,\mathbb{C}) = \langle X, Y, H \rangle$, $\underbrace{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{[X,Y]=H,\ [H,X]=2X,\ [H,Y]=-2Y}$

A/ Určete $i(H)$ tak, aby i byl homomorfismus Lie algeber.

B/ Adjungovaná representace $sl(3,\mathbb{C})$ je $sl(2,\mathbb{C})$-representace prostřednictvím i. Jaké representace (váhy, dimenze) $sl(2,\mathbb{C})$ obsahuje?

③ Napište definici duální representace Lie algebry $\mathfrak{g}$. Určete strukturu duální repr. $sl(3,\mathbb{C})$ k fundamentální vekt. representaci na $Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$. Recall $sl(3,\mathbb{C})$ acts on $\mathbb{C}^3$ by left matrix multiplication.

④ Definujte pojem řešitelné, nilpotentní a jednoduché Lie algebry. Napište nějaký příklad (pokud existuje!) řešitelné Lie algebry, která není nilpotentní.