NMAG 101 Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr
MFF UK
2. písemná práce – verze 1
15.12.2016
Doba řešení: 90 minut

Přednášející: L. Barto, D. Šmíd

Křestní jméno: ________________________ **Příjmení:** ____________________________

Cvičící: ____________________________

Instrukce

– **Neotvírejte dříve, než jste k tomu vyzváni dozorem!**

– Test je vytištěn oboustranně. Obsahuje 7 úloh na stranách 2 až 8, strany 9 až 10 jsou volné na pomocné výpočty apod. Jste odpovědný/á za to, že kopie zkoušky je úplná.

– Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněné, není-li řečeno jinak.

– Žádné elektronické pomůcky včetně kalkulačky nejsou dovoleny.

Příklad	Body
1 [6]	
2 [6]	
3 [6]	
4 [6]	
5 [8]	
6 [8]	
7 [10]	
Celkem [50]	

(1) [6 bodů] Zakroužkujte správnou odpověď, nezdůvodňujte. K získání bodů je potřeba vždy odpovědět správně všechny tři otázky.

(a)

- **PRAVDA NEPRAVDA** Elementární řádkové úpravy zachovávají lineární závislost/nezávislost posloupnosti řádkových vektorů.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Elementární sloupcové úpravy zachovávají lineární závislost/nezávislost posloupnosti řádkových vektorů.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Elementární řádkové úpravy zachovávají lineární závislost/nezávislost posloupnosti sloupcových vektorů.

(b) Předpokládejme, že A je reálná matice typu 4×7. Pak (vždy) platí:

- **PRAVDA NEPRAVDA** Je-li dimenze řádkového prostoru matice A rovná 2, pak je dimenze jádra matice A rovná 2.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Je-li dimenze sloupcového prostoru matice A rovná 2, pak je dimenze jádra matice A rovná 5.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Je-li dimenze řádkového prostoru matice A rovná 3, pak je dimenze sloupcového prostoru matice A rovná 3.

(c) Je-li matice A v řádkově odstupňovaném tvaru, pak (vždy) platí:

- **PRAVDA NEPRAVDA** Pokud A neobsahuje žádný nulový řádek, pak je posloupnost všech sloupcových vektorů matice A lineárně nezávislá.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Pokud jsou všechny sloupce matice A bázové, pak je posloupnost řádkových vektorů matice A lineárně nezávislá.
- **PRAVDA NEPRAVDA** Pokud je posloupnost sloupcových vektorů matice A lineárně nezávislá, pak jsou všechny sloupce matice A bázové.

(2) [6 bodů] Uveďte definici následujících pojmů. Pište pečlivě, celými větami, nikoliv schematicky.

(a) Matice přechodu od báze k bázi

(b) Lineární obal

(3) [6 bodů] V tomto příkladu nemusíte zdůvodňovat řešení. K plnému počtu bodů stačí správný výsledek.

(a) Určete vyjádření vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vzhledem k bázi B.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Vyberte z následující množiny vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$ nějakou bázi jejich lineárního obalu.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 3\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Zakroužkujte množiny, které generují $\mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

(4) [6 bodů] Najděte nějakou bázi prostoru $\mathrm{Im}\, A$ a nějakou bázi prostoru $\mathrm{Ker}\, A$ pro následující reálnou matici A. Vyjádřete nulový vektor v $\mathbb{R}^3$ jako netriviální lineární kombinaci sloupcových vektorů matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) [8 bodů] Tvrzení vždy pouze pečlivě zformulujte, nedokazujte.

(a) Formulujte kritérium na řešitelnost soustavy lineárních rovnic pomocí hodností význačných matic příslušných soustavě.

(b) Formulujte Steinitzovu větu o výměně.

(6) [8 bodů] V tomto příkladu máte dokázat jednodušší tvrzení ze skript, v reformulované nebo méně obecné podobě. V důkazu se neopírejte o obecnější formulaci téhož tvrzení. Pokud kromě definic použijete ještě nějaké jiné tvrzení, měla by jeho formulace být součástí důkazu.

(a) Dokažte následující tvrzení. Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5 \in V$. Pokud vektor $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5$ dvěma různými způsoby, pak některý z vektorů posloupnosti $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5)$ je lineární kombinací předchozích vektorů této posloupnosti.

(b) Dokažte následující tvrzení. Je-li $\mathbf{X}$ konečně generovaný podprostor konečně generovaného prostoru $\mathbf{Y}$, $X \neq Y$ a $\dim(\mathbf{Y}) = 10$, pak $\dim(\mathbf{X}) < 10$.

(7) [10 bodů] Odpovědi v následujících úlohách zdůvodněte (tj. dokažte).

(a) Každou matici ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{3\times 4}$ (prostor všech reálných matic typu 3×4) lze vyjádřit jako součet matice z podprostoru $X = \mathrm{LO}\{A_1, \dots, A_6\}$ a matice z podprostoru $Y = \mathrm{LO}\{B_1, \dots, B_8\}$. Jaká může být v takové situaci dimenze průniku podprostorů X a Y?

(b) Tvoří všechny reálné čtvercové matice A řádu 2 splňující $A^2 = 0_{2\times 2}$ podprostor prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

.

.

Konec