Obrazce z papíru jedním střihem

Anna Gajdová

11. 8. 2016

1 Úvod

S papírem se pojí známé japonské umění, origami. Mistři origami dokáží z archu papíru pouhým ohýbáním a skládáním vytvořit plastická zvířata, květiny a mnohé jiné motivy.

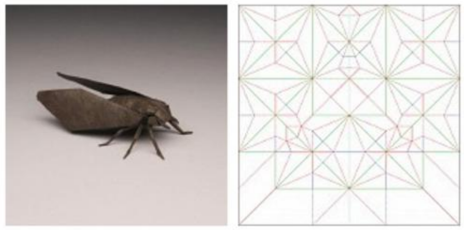
Origami si oblíbili také matematici. Na skládání origami se lze totiž dívat jako na geometrický problém a s nástupem počítačů byly vyvinuty algoritmy a techniky na návrhy nových modelů.

Se skládáním papíru souvisí i tato otázka: Jaké tvary můžeme získat jedním rovným střihem? Například třemi jednoduchými ohyby papíru a jedním střihem můžeme získat pěticípou hvězdu, což je údajně důvod toho, že na americké vlajce jsou právě hvězdy pěticípé [1]. Tento problém je znám pod názvem Fold and Cut, tedy Slož a Střihni. Matematici zjistili, že lze získat jakýkoli útvar, který na papír nakreslíme použitím rovných čar [2] V této práci bych se chtěla věnovat tomu, jak lze dané poskládání nalézt.

Obrázek 1: Origami model koně. Autor: Robert J. Lang

2 Formulace problému

Papír má tvar dvourozměrného mnohoúhelníku, u něhož je důležité, že můžeme rozlišit horní a dolní stranu. Překládáním vytváříme na papíru ohyby ve tvaru úseček. Pokud hotový papírový model rozložíme, zůstanou ohyby viditelné a tvoří na papíře vzor. Na jeho popis si vypůjčíme pojmy z teorie grafů. Jednotlivé ohyby vzoru tvoří *hrany*, které se stýkají ve *vrcholech*. Z matematického hlediska se tedy jedná o *rovinný graf*. Oblasti papíru ohraničené hranami nebo okrajem papíru budeme nazývat *stěnami grafu*.



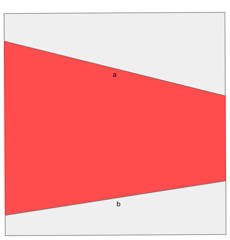
Obrázek 2: Origami model cikády a vzor ohybů modelu s rozlišením hor a údolí. Autor: Robert J. Lang

Každý ohyb je buď ve tvaru *hory*, nebo *údolí*. Ohyb hory vznikne, pokud se dotýkají dolní strany papíru, v opačném případě se jedná o ohyb údolí. Horu a údolí budeme na obrázcích rozlišovat barvou a druhem čar.

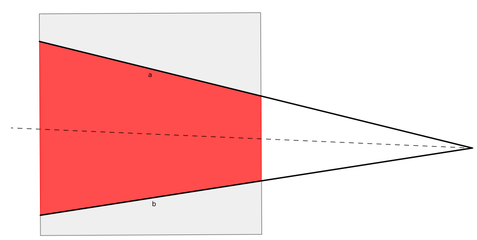
V úvodu bylo řečeno, že skládáním a střihem lze získat každý obrazec nakreslený rovnými čarami. Pro nakreslený obrazec je tedy naším cílem najít takový vzor ohybů, aby podle něj šlo papír poskládat do plochy tak, že k sobě všechny hrany obrazce přiléhají (a nic víc). Jedním střihem tedy přestřihneme všechny hrany najednou (a nic jiného) a po rozložení ústřižku získáme náš útvar. Zároveň také získáme antiútvar, tedy papír s dírou ve tvaru obrazce.

3 Jednoduché příklady a kostra obrazce

Jakým způsobem bychom vystřihli jedním střihem ze čtverce papíru červený obrazec z obrázku 3 ?



Obrázek 3: Jak vystřihnout červený obrazec?

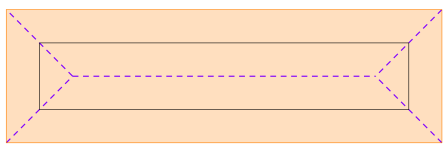


Obrázek 4: Vyznačený ohyb nutný k vystřihnutí.

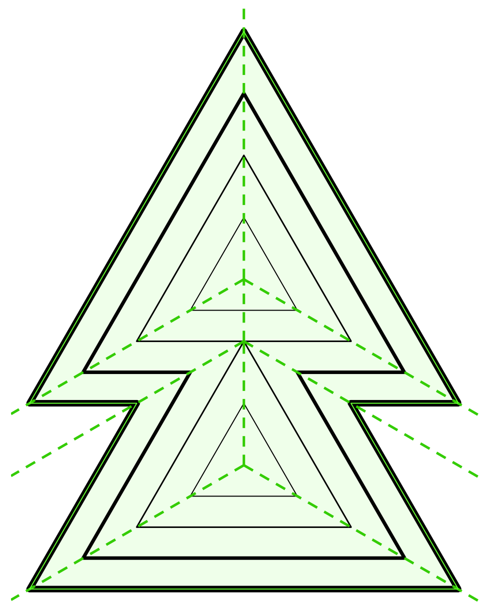
Tyto a následující obrázky byly vytvořeny pomocí programu Geogebra.

Jednoduše přiložíme hrany a a b na sebe. Tedy papír přeložíme podél osy úhlu vzniklého prodloužením těchto stran, jak lze vidět na obrázku 4.

Na podobné myšlence je založeno hledání *kostry obrazce*, anglicky *straight skeleton* [2][1]. Kostru získáme, když budeme obrazec smrskávat a natahovat a zaznamenávat trasu, kterou opíší vrcholy obrazce. Celé oblasti obrazce mohou při smrskávání a natahování zanikat, jak jde vidět na případu obdélníku (obrázek 5) nebo se rozdělit na víc dílů, jak jde vidět na příkladu stromku (obrázek 6).

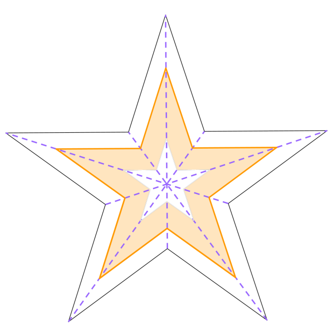


Obrázek 5: Barevně vyznačená kostra obdélníku, celá oblast zanikla

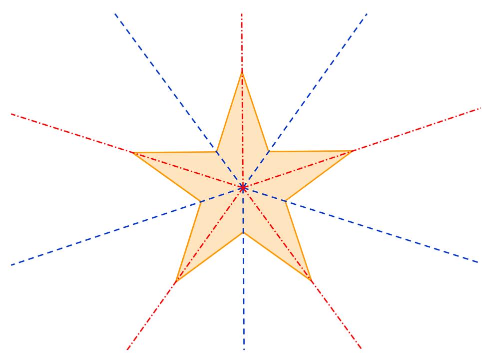


Obrázek 6: Smrskávání stromu a jeho kostra, oblasti se rozdělily.

Na obrázku číslo 7 je zobrazena kostra pravidelné pěticípé hvězdy. V případě hvězdy odpovídá kostra všem ohybům, které je potřeba provést k vyřešení problému. Zbývá rozlišit ohyby hor a údolí. To je ovšem snadné, záleží pouze na tom, jestli je úhel obrazce, který hrana kostry protíná, ostrý, nebo tupý. [1] Kostra má také pěknou vlastnost, že každé její stěně náleží jedna hrana obrazce, tedy jedna z hran, přes kterou chceme provést střih.



Obrázek 7: Kostra pěticípé hvězdy.



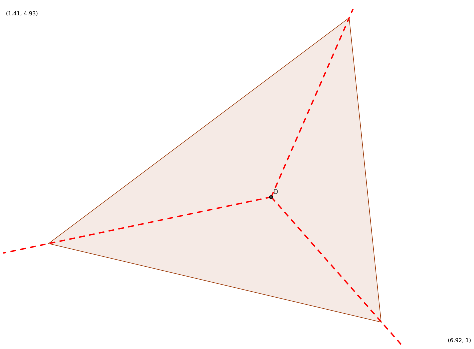
Obrázek 8: Vzor ohybů hvězdy s barevně odlišenými ohyby hor a údolí.

K řešení našeho problémem se nám bude hodit odpověď na jinou otázku matematického origami: Lze papír s určitým vzorem ohybů hor a údolí složit za použití všech ohybů do plochy, podobně jako bychom chtěli složit mapu?

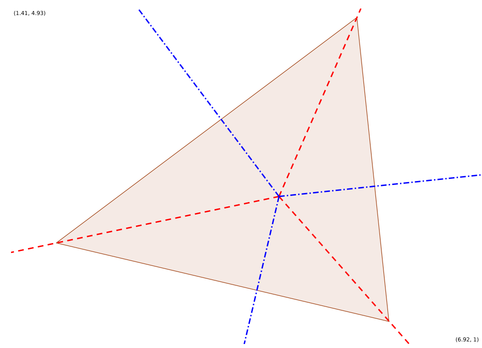
[1] Naše kostra je sice rovinný graf, ale nemá nic společného s klasickým pojmem kostra teorie grafů

4 Jde to poskládat?

Jak bychom postupovali, kdybychom chtěli jedním střihem získat trojúhelník? Kostra nám v tomto případě napovídá, že máme provést tři ohyby podél os úhlů trojúhelníka a zakončit je v těžišti (obrázek 9). To nám ale nebude stačit, takto složený papír není plochý.

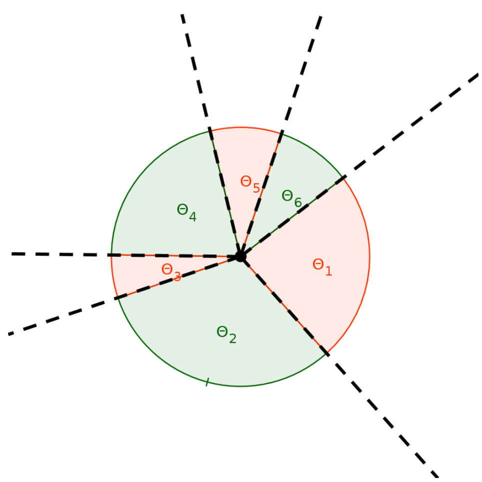


Obrázek 9: Kostra trojúhelníka.



Obrázek 10: Trojúhelník s kostrou a kolmicemi.

Ohýbaní podél hran kostry obecně zaručí, že k sobě budou přiléhat sousední hrany obrazce, ale nezajistí nám, že půjde papír poskládat do plochy.



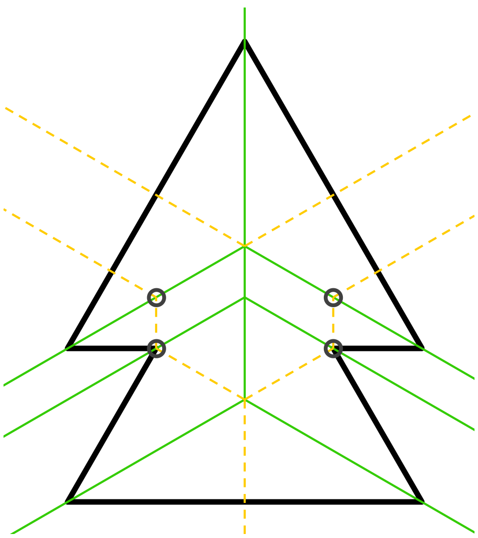
Obrázek 11: Ohyby kolem jednoho vrcholu je možné popsat posloupností úhlů.

K tomu potřebujeme Kawasakiho větu, která se týká skládání kolem jediného vrcholu. Pro takový vzor ohybů, kde všechny hrany vychází z jednoho vrcholu, platí, že ho lze popsat posloupností úhlů mezi jednotlivými hranami (obrázek 11).

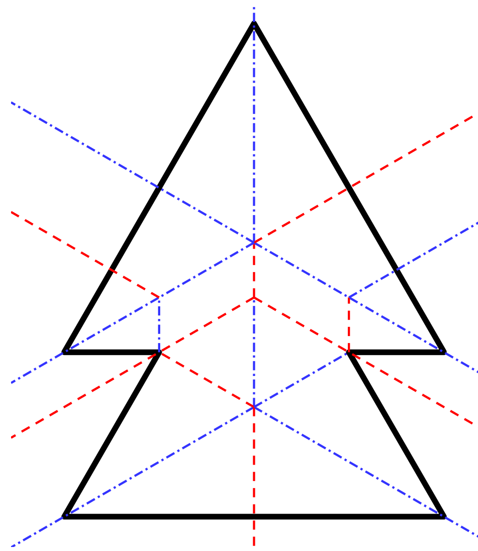
Kawasakiho věta: Mějme vzor ohybů vycházejících z jednoho vrcholu a odpovídající posloupnost n úhlů $\Theta_1, ...\Theta_n$. Tento vzor lze lokálně poskládat do plochy právě tehdy, když n je sudé a platí $\Theta_1 + \Theta_3 + ... + \Theta_{n-1} = \Theta_2 + ... + \Theta_n = 180°$.

U trojúhelníka podmínku pro poskládání z Kawasakiho věty splníme, když z jeho těžiště, spustíme kolmici na každou stranu trojúhelníka. Teď už lze ohýbáním podél hran kostry a kolmic papír poskládat do plochy a získat trojúhelník jedním střihem (obrázek 10).

Spouštění kolmic zajistí vždy nejen lokální poskládání vrcholu do plochy, ale i celého obrazce [3]. Provedeme to takto. Z každého vrcholu kostry se pokusíme do každé přilehlé stěny spustit kolmici na tu hranu obrazce, která této stěně náleží. Kolmice můžou buď obrazec opustit (jako v případě trojúhelníka), ukončit cestu v jiném vrcholu kostry, nebo narazit na další hranu kostry. V takovém případě se kolmice přes tuto hranu zrcadlově zobrazí a pokračuje dál. Vše dává smysl, když si představíme, jak se papír v místě hrany, do které kolmice narazila, ohýbá.



Obrázek 12: Kostra stromu a kolmice (čerchovaně) s vyznačenými místy zlomu.



Obrázek 13: Vzor ohybů stromu s rozlišením hor a údolí.

Na obrázku 12 jsou vyznačené kolmice na příkladě stromu. Také jsou na něm vyznačená místa, v kterých se kolmice musely zrcadlově zlomit.

Hrany kostry a kolmice tvoří (téměř vždy) všechny ohyby, které potřebujeme. K dokončení zbývá pouze určit, jestli ohyby podél kolmic budou hory nebo údolí. Pravidlem je, že pokud se kolmice zrcadlí přes hranu kostry, změní se taky druh jejího ohybu, takže se hora a údolí střídají. Komplikovanější je určit, kterým ohybem začít, nejlepší je asi metodou pokusu a omylu při skládání.

Na obrázku 13 je kompletní vzor ohybů obrázku stromu. Všechny ohyby sice nutné nejsou a lze postupovat i jednodušeji (například využitím symetrie stromu), ale na druhou stranu po složení je zapotřebí nejkratší střih.

5 Další možnosti

Pomocí kostry a kolmic nalezneme řešení téměř vždy. Výjimkou jsou případy, kdy se kolmice donekonečna odrážejí. Takové obrazce je ovšem možné vyřešit jinou, složitější, metodou, která spočívá v pokrývání obrazce kruhy (*Disk-Packing method* [2]).

Už i jednoduchých obrazců vznikají často spletité vzory ohybů, které je komplikované poskládat.

Problém Fold and Cut má také zobecnění do vyšších dimenzí, která zatím zůstávají nevyřešena [1].

Reference

[1] Erik D. Demaine. Video lecture L08 of MIT's 6.849: Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra. http://courses.csail.mit.edu/6.849/fall12/lectures/L08.html.

[2] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, July 2007.

[3] Erik D. Demaine. Video lecture L03 of MIT's 6.849: Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra. http://courses.csail.mit.edu/6.849/fall12/lectures/L03.html.

Zdroje obrázků

Rober J. Lang a vlastní tvorba.