

Matematika a ... ekologie

Luděk Berec

Centrum matematické biologie

Katedra matematiky

Přírodovědecká fakulta

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Nematematické problémy matematiků, 8. 11. 2023

Matematická biologie vs biomatematika



www.earth.com/news/math-equations-fight-diseases/

Biologie

imunologie

populační genetika

ekologie

farmakometrika

epidemiologie

fyzologie

molekulární biologie

evoluční biologie

onkologie



ID 234691065 © Sabelskaya | Dreamstime.com

Mor a cesty jeho přenosu

Mor: **hlodavci** → **krysy** → **blechy (blecha morová)** → **lidé**

Dýmějový vs plicní mor (inhalace infikovaných kapének)

Středověk: **Černá smrt** (druhá morová epidemie)

Většina pramenů o krysách v souvislosti s morem vůbec nemluví

Zákaz prodeje a nákupu obnošeného šatstva v dobách nákaz

Teorie miasmatu (Hippokratés, Galén)

Blecha obecná či veš šatní jako **přímí přenašeči**?

Jaký typ přenosu nejlépe odpovídá datům?

Mor a cesty jeho přenosu

Dean et al. (2018)

Tři hypotézy:

Model člověk-ektoparazit

- ektoparazit (blecha, veš) jako vektor přenosu mezi lidmi

Model krysa-blecha-člověk

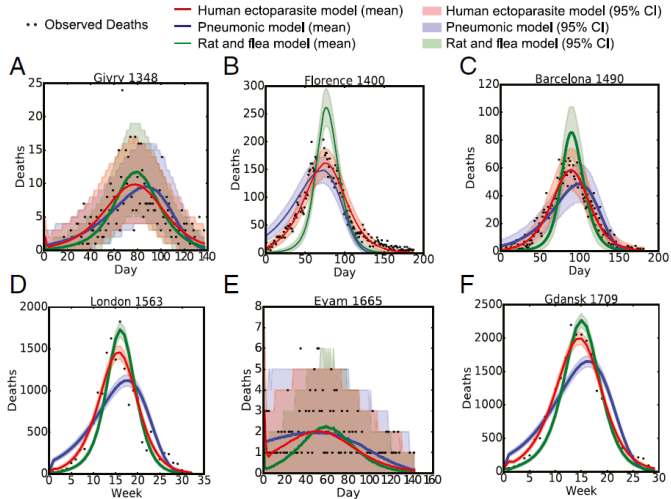
- blecha jako vektor přenosu mezi krysami, člověk jako slepá větev

Model kapénkového přenosu plicního moru

- přímý přenos mezi lidmi

Mor a cesty jeho přenosu

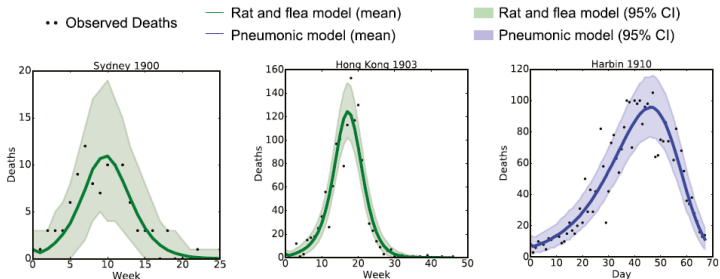
Dean et al. (2018)



Mor a cesty jeho přenosu

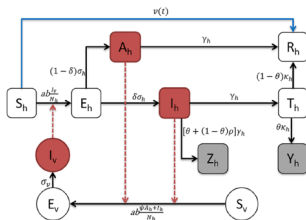
Dean et al. (2018)

Validace



Modely

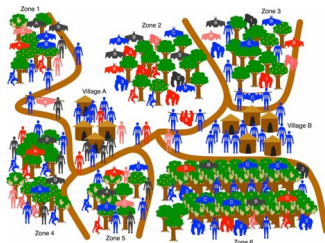
Kompartimentové modely



[journals.plos.org/plosntds/...
article?id=10.1371/journal.pntd.0006158](https://journals.plos.org/plosntds/article?id=10.1371/journal.pntd.0006158)

Rozdělení populace
do konečného počtu tříd

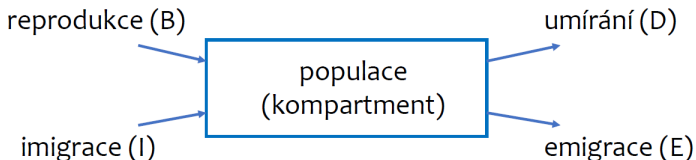
Agentní modely



www.liebertpub.com/doi/epub/10.1089/vbz.2012.0987

Velká flexibilita, velká datová
náročnost, velká citlivost

Kompartmentové modely



$$N' = B - D + I - E$$

zákon zachování početnosti populace

Populační růst

Model růstu bakteriální populace



E. coli (*Escherichia coli*) is a type of bacteria that lives in the digestive tracts of humans and animals. It grows by splitting in half, through a process called binary fission.

www.collectedny.org/mathmemos/the-e-coli-problem/

x_t ... počet / hustota bakterií v čase t

$$x_{t+1} = x_t + r x_t = (1 + r) x_t$$

$x_t = x_0 (1 + r)^t$... exponenciální (geometrický) růst

Populační růst

Model růstu bakteriální populace

místnost $5 \times 5 \times 3 \text{ m} = 75 \text{ m}^3$

baktérie 1 mm^3

$x_0 = 1$... jedna baktérie na počátku simulace

časový krok 20 minut

Po jakém čase populace bakterií vyplní tuto místnost?

$x_T = 75 \cdot 10^9 / 1 = 7.5 \cdot 10^{10}$... koncový počet bakterií

$$x_T = x_0 (1 + r)^T \Rightarrow T = (\ln x_T - \ln x_0) / \ln(1 + r)$$

$r = 1 \Rightarrow T = 36.13$ časových kroků ≈ 12 hodin

Populační růst

Model růstu populace

$N(t)$... počet / hustota jedinců v čase t

N' = rychlost rozmnožování — rychlost umírání

$$N' = B - D = b(N)N - d(N)N$$

■ $b(N) = b$... rychlost reprodukce na jedince

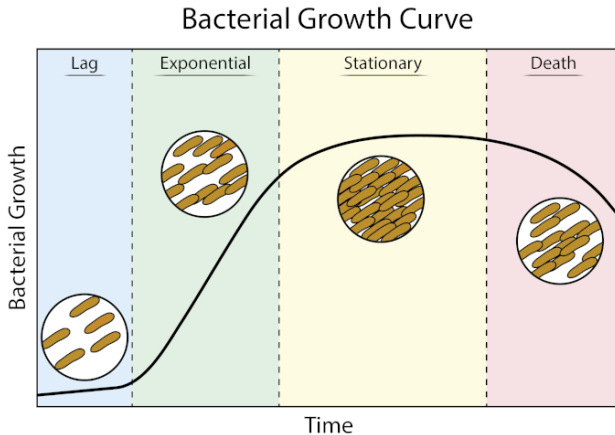
■ $d(N) = d$... 1 / střední délka života

$$N' = bN - dN = (b - d)N$$

$$N(t) = N(0) e^{(b-d)t}$$

exponenciální růst

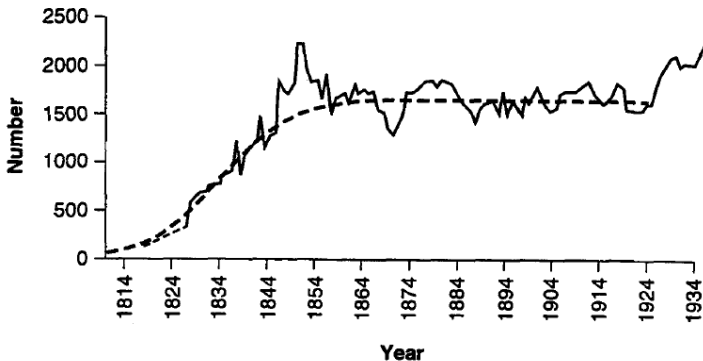
Když exponenciálnímu růstu dojde dech



www.jove.com/v/10511/growth-curves-cfu-and-optical-density-measurements

Když exponenciálnímu růstu dojde dech

Populace ovcí v Tasmánii

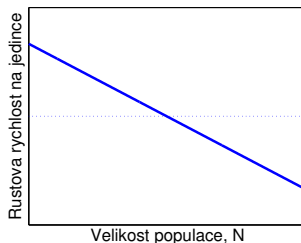
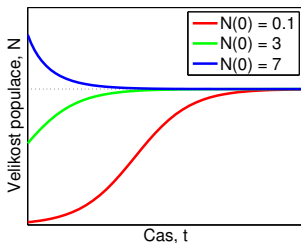


Price (1999)

Když exponenciálnímu růstu dojde dech

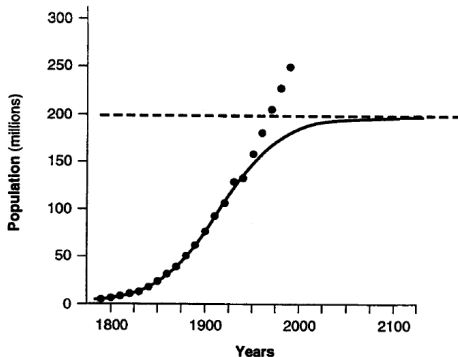
logistický model

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$



Když exponenciálnímu růstu dojde dech

Růst populace USA predikovaný ve 20. letech 20. století



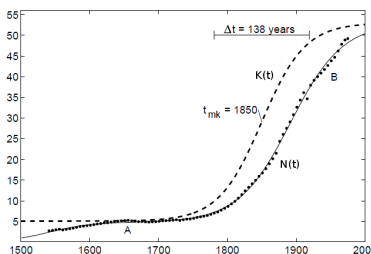
Price (1999)

Když exponenciálnímu růstu dojde dech

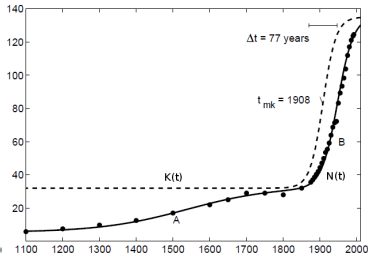
Bi-logistický růst: změna nosné kapacity prostředí

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K(t)} \right), \quad \frac{dK(t)}{dt} = r_K(K(t) - K_1) \left(1 - \frac{K(t) - K_1}{K_2} \right)$$

Anglie 1541-1975



Japonsko 1100-1992



Meyer & Ausubel (1999)

Stavově strukturované modely

Maticové modely

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} F_1 + G_1 & F_2 & F_3 & \cdot & \cdot & F_\omega \\ P_1 & G_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & P_2 & G_3 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & P_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{\omega-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & P_{\omega-1} & G_\omega \end{bmatrix}$$

G_i ... pravděpodobnosti, že jedinci zůstanou ve stejné třídě

P_i ... pravděpodobnosti, že jedinci postoupí do vyšší třídy

$G_i = 0$... Leslieho věkově strukturovaný maticový model

Perronova-Frobeniova teorie nezáporných matic

Stavově strukturované modely

Kareta obecná (*Caretta caretta*)

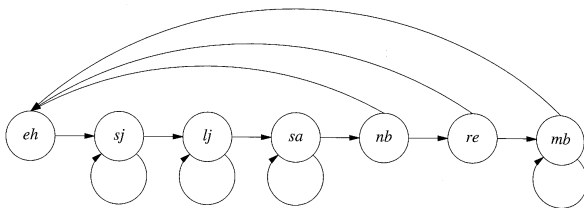
Crouse et al. (1987)



life-sea.blogspot.cz/2011/07/life-of-loggerhead-sea-turtle.html

Stavově strukturované modely

eh \equiv eggs, hatchlings,
 sj \equiv small juveniles,
 lj \equiv large juveniles,
 sa \equiv subadults,
 nb \equiv novice breeders,
 re \equiv 1st year remigrants,
 mb \equiv mature breeders.



Stavově strukturované modely

$$\begin{pmatrix} eh \\ sj \\ lj \\ sa \\ nb \\ re \\ mb \end{pmatrix}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 127 & 4 & 80 \\ 0.6747 & 0.737 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0486 & 0.6610 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0147 & 0.6907 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0518 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8091 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8091 & 0.8089 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} eh \\ sj \\ lj \\ sa \\ nb \\ re \\ mb \end{pmatrix}_t$$

$$\lambda_0 = 0.945,$$

$$\lambda_1 = 0.372,$$

$$\lambda_2 = 0.265,$$

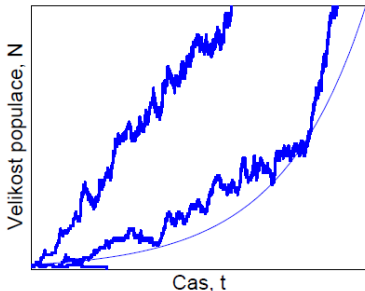
$$\lambda_{3,4} = 0.746 \pm 0.213 i,$$

$$\lambda_{5,6} = -0.088 \pm 0.12 i.$$

početnost populace klesá

Minimální velikost životaschopné populace

- prevence extinkce následkem demografické, environmentální či genetické stochasticity
- pravidlo 50/500: alespoň 50 jedinců k prevenci inbreedingu, alespoň 500 jedinců jako ochrana proti genetickému driftu



Minimální velikost životaschopné populace

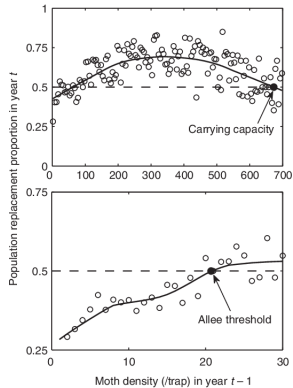
Jaká je minimální životaschopná velikost vesmírné kolonie?



planetpailly.com/2017/06/21/whats-the-minimum-viable-population-of-a-space-colony/

Populační růst

Když se exponenciální růst nemůže nadechnout



Courchamp et al. (2008) Allee effects in ecology and conservation.

Když se exponenciální růst nemůže nadechnout

exponenciální růst

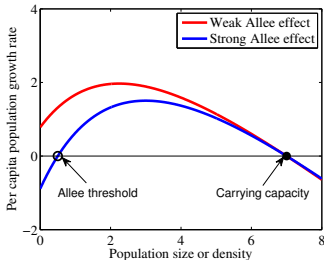
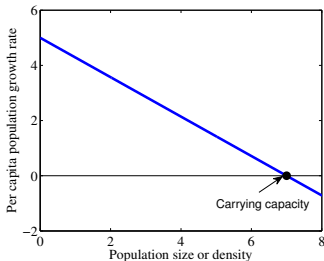
$$\frac{dN}{dt} = bN - dN$$

logistický růst

$$\frac{dN}{dt} = bN - (d + d_1 N)N$$

Alleeho efekt

$$\frac{dN}{dt} = b \frac{N}{N + S} N - (d + d_1 N)N$$

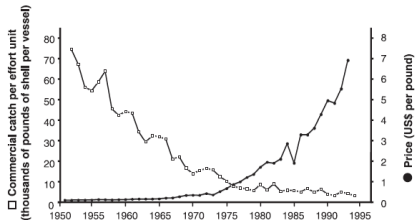
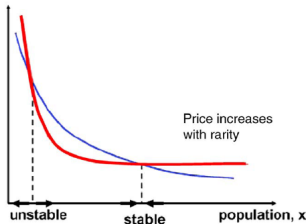


Když se exponenciální růst nemůže nadechnout

Courchamp et al. (2006)

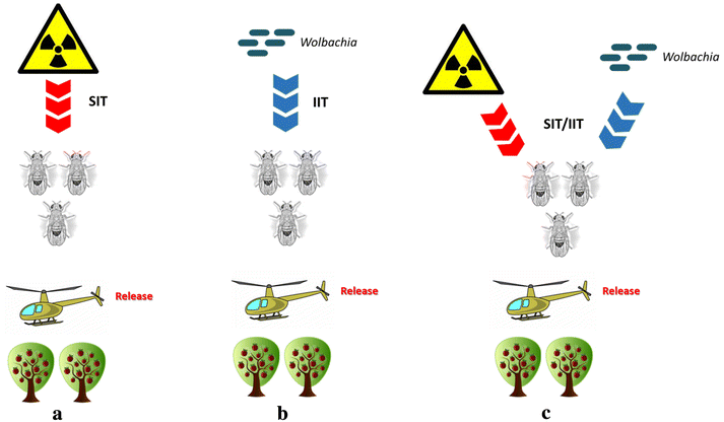
$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - qEx \dots \text{velikost populace}$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha(p(x)qEx - cE) \dots \text{lovné úsilí}$$



Malárie: boj proti komárům

sterile insect technique (SIT) + Wolbachia inoculation (IIT)



Nikolouli et al. (2018)

Malárie: boj proti komárům

Berec et al. (2016)

$$\underbrace{\frac{dF_w}{dt}}_{\text{rate of change of susceptible females}} = \underbrace{\beta\chi_w\Lambda(F_w + (1-\alpha)rF_w^i)(M_w + M_w^i + f_1\xi_s S)}_{\text{reproduction}} - \underbrace{(\mu_w + bP)F_w}_{\text{mortality}},$$

$$\underbrace{\frac{dM_w}{dt}}_{\text{rate of change of susceptible males}} = \underbrace{\beta(1-\chi_w)\Lambda(F_w + (1-\alpha)rF_w^i)(M_w + M_w^i + f_1\xi_s S)}_{\text{reproduction}} - \underbrace{(\mu_w + bP)M_w}_{\text{mortality}},$$

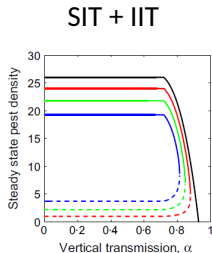
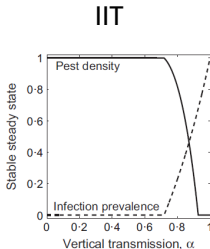
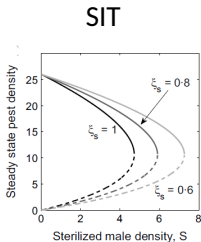
$$\underbrace{\frac{dF_w^i}{dt}}_{\text{rate of change of infected females}} = \underbrace{\beta\chi_w\Lambda\alpha r F_w^i (M_w + M_w^i + f_1\xi_s S)}_{\text{reproduction}} - \underbrace{(\mu_w + bP)F_w^i}_{\text{mortality}},$$

$$\underbrace{\frac{dM_w^i}{dt}}_{\text{rate of change of infected males}} = \underbrace{\beta(1-\chi_w)\Lambda\alpha r (1-q) F_w^i (M_w + M_w^i + f_1\xi_s S)}_{\text{reproduction}} - \underbrace{(\mu_w + bP)M_w^i}_{\text{mortality}}.$$

$$\Lambda = \frac{\mathcal{M}(F_w + F_w^i, M_w + M_w^i + \xi_s S)}{(F_w + F_w^i)(M_w + M_w^i + \xi_s S)} \quad \mathcal{M}(F, M) = 2 \frac{MF}{M + F}.$$

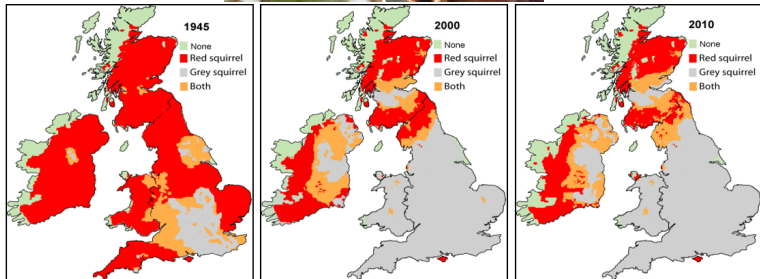
Malárie: boj proti komárům

Berec et al. (2016)



Populační interakce

Invaze veverek popelavých



Populační interakce

Tompkins et al. (2003)

S_r ... počet červených veverek v daném okamžiku

S_g ... počet šedých veverek v daném okamžiku

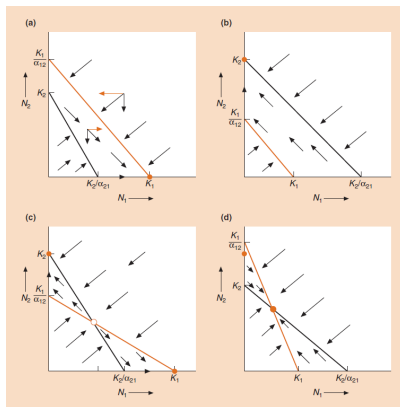
$$\frac{dS_r}{dt} = [a_r - q_r(S_r + c_g S_g)] S_r - b S_r$$
$$\frac{dS_g}{dt} = [a_g - q_g(S_g + c_r S_r)] S_g - b S_g$$

Nosné kapacity: $K_1 = (a_r - b)/q_r$, $K_2 = (a_g - b)/q_g$

Konkurenční koeficienty: $\alpha_{21} = K_2/c_r$, $\alpha_{12} = K_1/c_g$

Populační interakce

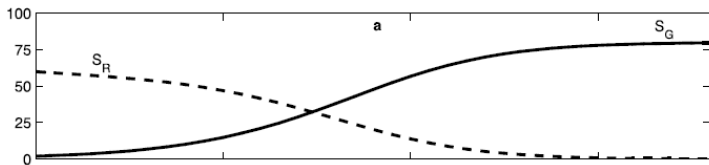
Begon et al. (2006)



$$K_2 > K_1/\alpha_{12}, K_1 < K_2/\alpha_{21}$$

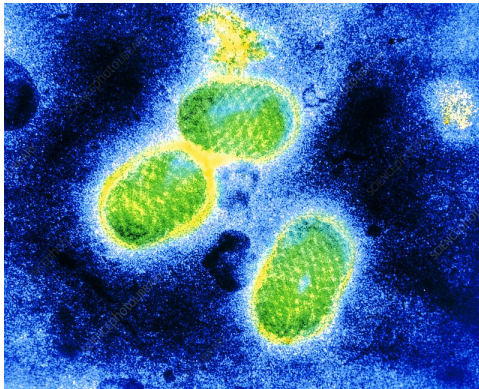
Populační interakce

Tompkins et al. (2003)



Populační interakce

parapoxvirus



www.sciencephoto.com/media/248124/view/tem-of-parapoxviruses

Populační interakce

Tompkins et al. (2003)

Parapoxvirus ($H_r = S_r + I_r$, $H_g = S_g + I_g + R_g$)

$$\frac{dS_r}{dt} = [a_r - q_r(H_r + c_g H_g)] H_r - b S_r - \beta S_r (I_r + I_g)$$

$$\frac{dI_r}{dt} = \beta S_r (I_r + I_g) - b I_r - \alpha I_r$$

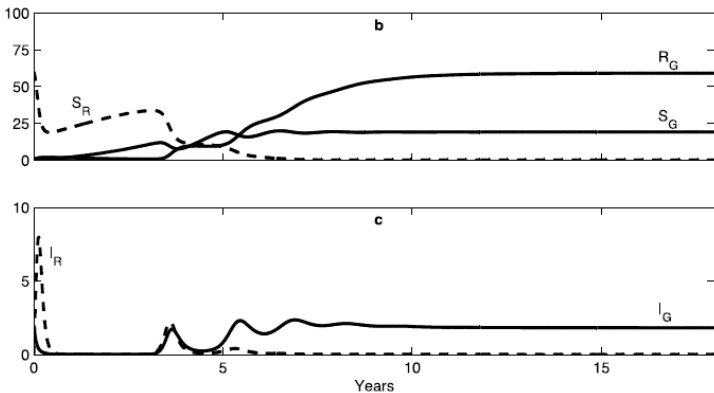
$$\frac{dS_g}{dt} = [a_g - q_g(H_g + c_r H_r)] H_g - b S_g - \beta S_g (I_g + I_r)$$

$$\frac{dI_g}{dt} = \beta S_g (I_g + I_r) - b I_g - \gamma I_g$$

$$\frac{dR_g}{dt} = \gamma I_g - b R_g$$

Populační interakce

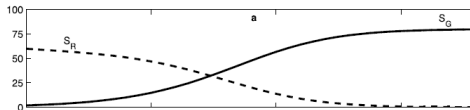
Tompkins et al. (2003)



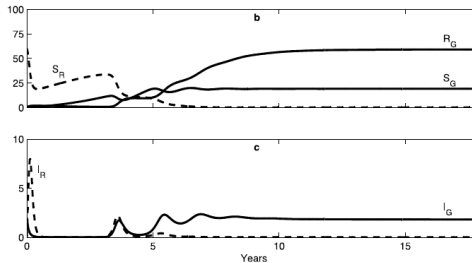
Populační interakce

Tompkins et al. (2003)

Konkurence bez parapoxviru



Konkurence s parapoxvirem



Populační interakce

kuna lesní



www.discoverwildlife.com/news/pine-martens-released-into-the-forest-of-dean

Populační interakce

Predace kunou lesní

$$\frac{dS_r}{dt} = [a_r - q_r(H_r + c_g H_g)] H_r - b S_r - \beta S_r (I_r + I_g) - a_r S_r P$$

$$\frac{dI_r}{dt} = \beta S_r (I_r + I_g) - b I_r - \alpha I_r - a_r I_r P$$

$$\frac{dS_g}{dt} = [a_g - q_g(H_g + c_r H_r)] H_g - b S_g - \beta S_g (I_g + I_r) - a_g S_g P$$

$$\frac{dI_g}{dt} = \beta S_g (I_g + I_r) - b I_g - \gamma I_g - a_g I_g P$$

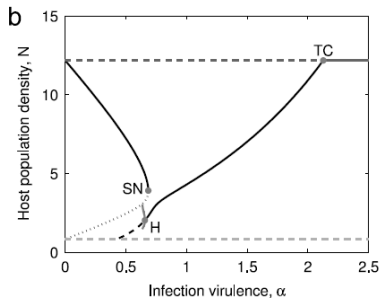
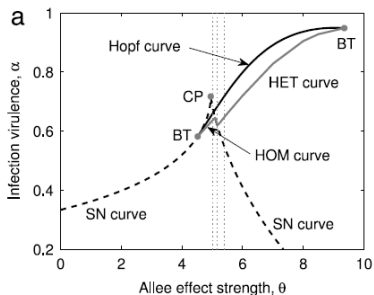
$$\frac{dR_g}{dt} = \gamma I_g - b R_g - a_g R_g P$$

$$\frac{dP}{dt} = \dots, a_g > a_r$$

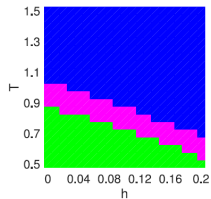
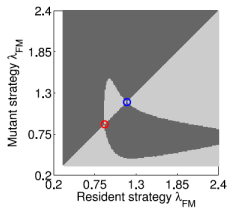
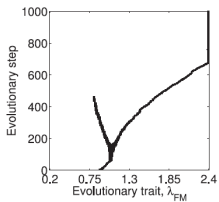
Komplexní bifurkace

Berec et al. (2017)

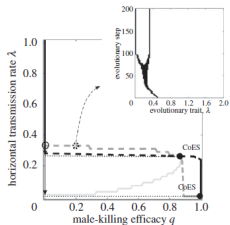
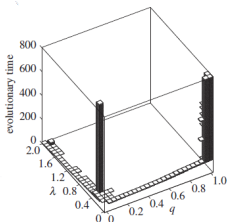
L. Berec et al. / *Theoretical Population Biology* 114 (2017) 59–69



Evolve



adaptivní dynamika



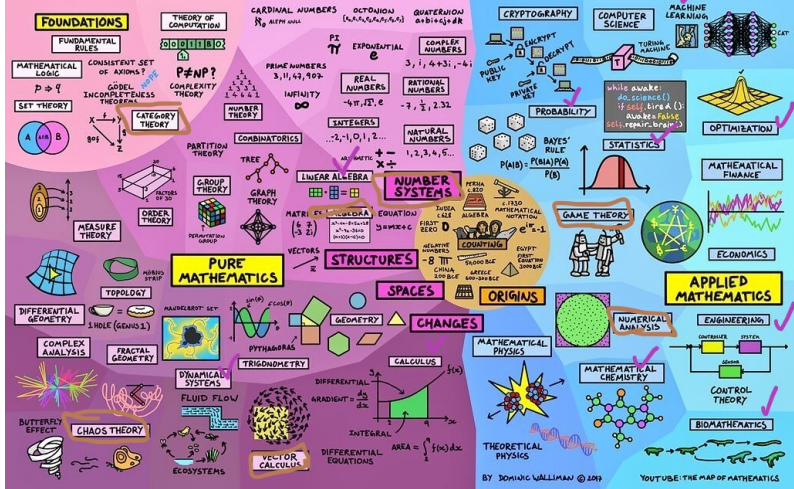
Bernhauerová et al. (2015), Berec et al. (2018)

Stefan A. H. Geritz

Resident-invader dynamics and the coexistence of similar strategies

Proposition 3. (“Strong invasion-fixation theorem”) *Suppose that H1, H2 and H4 are satisfied, and let $x \in \mathcal{X}$ be such that there does not exist a $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ that satisfies both $D_1 s(x, x)\xi = 0$ and $\xi^\top D_{12} s(x, x)\xi = 0$. Then there exists an $\varepsilon > 0$ and a $\delta > 0$ such that every orbit of (6) starting in the interior of $T_\varepsilon(\widehat{N}(x))$ converges to $(0, \widehat{N}(y))$ as $t \rightarrow \infty$ whenever $s(y, x) > 0$, $s(x, y) < 0$ and $\|y - x\| < \delta$. \square*

THE MAP OF MATHEMATICS



iambecomecomputational.com/2020/03/06/map-of-mathematics-applications-to-biology-and-beyond/