1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 3.3.2025

Úloha 1. Je 572 v nějaké číselné soustavě dělitelné 275?

Úloha 2. Dokažte, že pokud konverguje posloupnost $a_n + 2a_{n+1}$, tak konverguje i posloupnost a_n.

Úloha 3. Nechť A a B jsou reálné $n \times n$ matice splňující $A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$. Dokažte, že pak $\det A = \det B$.

Úloha 4. Na přímé silnici je několik semaforů. Na každém semaforu se střídá po minutě červená a zelená (obecně na každém semaforu padne zelená v jiný čas). Dvě auta jedou po silnici rychlostí 60 km/h ve stejném směru. Musí zastavit na červené a pokračovat, když padne zelená. Dokažte, že pokud je na začátku vzdálenost mezi auty větší než 2 km, pak se nikdy nepotkají.

Úloha 5. Funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zachovává sčítání a komutuje s exponenciálou neboli $f(x+y) = f(x)+f(y)$ a $f(e^x) = e^{f(x)}$ pro všechna x, $y \in \mathbb{C}$. (Příkladem je komplexní sdružení $f(z) = \bar{z}$.) Dokažte $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Úloha 6. Tomáš má krychličkový náhrdelník. Ten si udělal tak, že vzal n^3 krychliček, každou provrtal po tělesové úhlopříce, navlékl na nit a nit svázal do kroužku tak, aby nezbyla žádná volná nit (celá délka je pokrytá krychličkami). Teď si chce postavit z náhrdelníku krychli $n \times n \times n$. Pro jaká n se mu to může podařit?

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

1st home series

Solutions will be presented at the seminar on March 3, 2025.

Problem 1. Is 572 divisible by 275 in any number system?

Problem 2. Let (a_n) be a sequence. Prove that if the sequence $(a_n + 2a_{n+1})$ is convergent, then (a_n) is also convergent.

Problem 3. Let A and B be real $n \times n$ matrices such that $A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$. Prove that $\det A = \det B$.

Problem 4. There are several traffic lights on a straight road. Each traffic light alternates between red and green every minute (generally, each traffic light turns green at a different time). Two cars are driving on the road at a speed of 60 km/h in the same direction. They must stop at the red light and continue when the light turns green. Prove that if the distance between the cars is greater than 2 km at the beginning, then they will never meet.

Problem 5. Suppose that $a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ respects addition and exponentiation in the sense that $a(x+y) = a(x) + a(y)$ and $a(e^x) = e^{a(x)}$ for all complex numbers x and y. (An example is complex conjugation: $a(z) = \bar{z}$.) Prove $a(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Problem 6. Tomáš has a necklace of cubes. He made it by taking n^3 cubes, drilling a hole along the solid diagonal through each of them, threading a thread through it, and tying the thread into a ring so that there is no loose thread left (the entire length is covered with cubes). Now he wants to build an $n \times n \times n$ cube from the necklace. For what n can he do this?