1. soutěžní série – řešení

1. $n^2 - (n-1)$. Kdyby obsahovala o jednu víc, už by musela mít dva řádky plné jedniček, takže by byla signulární. Vyhovující matice s tímto počtem jedniček:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Regularitu ověříme přímočarou eliminací

2. Označme $f_1(x) = e^x - 1$, $f_2(x) = \ln(x+1)$. Jsou-li f, $g \in S$, pak také $f_1(f_2(f) + f_2(g)) \in S$. Tato funkce je rovna $\exp(\ln(f(x)+1)+\ln(g(x)+1))-1 = (f(x)+1)(g(x)+1)-1 = f(x)g(x) + f(x) + g(x)$. Dle vlastnosti (iii) můžeme od této funkce odečíst $f + g$ a jsme hotovi.

3. Všechna k od 2025 dál. $k \leq 2024$ nejde, $\frac{\phi(n)}{n} < 1$ pro $n > 1$. Ukážeme, že $\limsup \frac{\phi(n)}{n} = 1$ a $\liminf \frac{\phi(n)}{n} = 1$. Potom umíme dostat každé $\frac{\phi(a_i)}{a_i}$ libovolně blízko 1 a půjde $k = 2025$. Ale umíme ho dostat i libovolně blízko 0, takže můžeme přidávat další, aniž dosáhne součet 2025.

Platí $\frac{\phi(n)}{n} = \prod_p \frac{p-1}{p}$, kde součin je přes všechny prvočíslené dělitele n. Zolíme-li za a_i prvočíslo p, máme $\frac{\phi(a_i)}{a_i} = \frac{p-1}{p} \to 1$, z čehož plyne lim sup. Pro lim inf musíme naopak volit a_i dělitelná hodně prvočísly. Představovali bychom si a_i dělitené všemi prvočísly, pak bychom dostali

$$\frac{\phi(a_i)}{a_i} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{p-1}{p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} 1/p^j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} 1/j} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

kde použijeme převod na součet geometrické řady, dále to, že roznásobením geometrických řad všech prvočísel vyjde každé přirozené číslo právě jednou (má jednoznačný rozklad), a divergenci harmonické řady. Ve skutečnosti vezmeme a_i dělitelné všemi prvočísly do nějakého M, pak dostaneme $\frac{\phi(a_i)}{a_i} \leq \frac{1}{\sum_{j=0}^{M} 1/j} \to 0$.

4. Odpověď je 12^{10} Pravidelný dvacetistěn sestává ze dvou pětibokých jehlanů, které jsou spojeny tělesem, jehož plášť tvoří pás P deseti trojúhelníků a jehož podstavy jsou pravidelné pětiúhelníky pootočené vůči sobě o úhel 36°. Uvědomme si, že jsou-li obravené dvě strany trojúhelníku, pak pro obarvení zbývající strany máme vždy právě 2 možnosti (mají-li 2 strany různé barvy, pak třetí strana musí mít jednu z těchto dvou barev, pokud mají dvě strany stejnou barvu, pak třetí strana musí mít jednu ze zbývajících dvou barev).

Nejprve obarvíme 10 hran spojujících trojúhelníky v pásu P, pro každou máme 3 možnosti, tj. celkem 3^{10} možností. Nyní obarvíme třetí strany trojúhelníků v pásu P (tj. hrany dvou pětiúhelníkových podstav). Jak bylo napsáno výše, pro každou máme 2 možnosti, tj. 2^{10} možností. Zbývá ukázat, že máme-li pevně obarveny hrany podstavy pětibokého jehlanu, pak pro obarvení jeho zbývajících pěti hran máme vždy právě 2^5 možností.

Označme barvy čísly 0, 1, 2 a hodnoty barev pěti dosud neobarvených hran pětibokého jehlanu $x_1, \dots, x_5$. Podmínka na obarvení říká, že součet barev každé stěny je nenulový modulo 3. To nám dává soustavu rovnic $x_1 + x_2 = s_0, x_2 + x_3 = s_1, \dots, x_5 + x_1 = s_5$, kde každé z čísel $s_1, \dots, s_5$ může nabývat dvou různých hodnot (aby součet příslušné stěny byl nenulový). Protože matice této soustavy je regulární (determinant je 2), má soustava právě jedno řešení pro každou z 2^5 uvažovaných pravých stran.