# 1. soutěžní série

24. 2. 2025

**Úloha 1.** Kolik nejvýše jedniček může obsahovat regulární $n \times n$ matice nad $\mathbb{R}$? (5 bodů)

**Úloha 2.** Buď $S$ množina funkcí z $[0, \infty)$ do $[0, \infty)$ splňující:

(i) $e^x - 1$, $\ln(x+1) \in S$;

(ii) pokud $f$, $g \in S$, pak také $f + g$, $f \circ g \in S$;

(iii) pokud $f$, $g \in S$ a $f \geq g$, pak $f - g \in S$.

Dokažte, že kdykoli $f$, $g \in S$, pak i jejich součin $fg \in S$. (10 bodů)

**Úloha 3.** Pro přirozené číslo $n$ označme $\phi(n)$ počet přirozených čísel menších nebo rovných $n$, která jsou nesoudělná s $n$. Najděte všechna přirozená čísla $k$, pro něž existuje $k$-tice přirozených čísel $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ splňující

$$\left\lfloor \frac{\phi(a_1)}{a_1} + \frac{\phi(a_2)}{a_2} + \cdots + \frac{\phi(a_k)}{a_k} \right\rfloor = 2024.$$

(10 bodů)

**Úloha 4.** Hrany pravidelného dvacetistěnu si očíslujeme $1, 2, \ldots, 30$, abychom je rozlišili. Kolik je nyní způsobů, jak každou hranu obravit jednou ze tří barev (červená, bílá, modrá), aby každá z dvaceti trojúhelníkových stěn měla dvě strany stejné barvy a třetí stranu jinou?

# 1st contest series

February 24, 2025

**Problem 1.** What is the maximal number of ones among the $n^2$ elements of an invertible $n \times n$ matric over $\mathbb{R}$? (5 points)

**Problem 2.** Let $S$ be a class of functions from $[0, \infty)$ to $[0, \infty)$ that satisfies:

(i) $e^x - 1$, $\ln(x+1) \in S$;

(ii) if $f$, $g \in S$, then $f + g$, $f \circ g \in S$;

(iii) if $f$, $g \in S$ and $f \geq g$, then $f - g \in S$.

Prove that if $f$, $g \in S$, then the product $fg \in S$. (10 points)

**Problem 3.** Given a positive integer $n$, let $\phi(n)$ denote the number of positive integers less than or equal to $n$ that are relatively prime to $n$. Find all possible positive integers $k$ for which there exist positive integers $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ such that:

$$\left\lfloor \frac{\phi(a_1)}{a_1} + \frac{\phi(a_2)}{a_2} + \cdots + \frac{\phi(a_k)}{a_k} \right\rfloor = 2024$$

(10 points)

**Problem 4.** The 30 edges of a regular icosahedron are distinguished by labeling them $1, 2, \ldots, 30$. How many different ways are there to paint each edge red, white, or blue such that each of the 20 triangular faces of the icosahedron has two edges of the same color and a third edge of a different color?