2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 24.3.2025

Úloha 1. Nechť u, v, w, z jsou navzájem různá přirozená čísla splňující $u + v = w + z$. Dokažte, že pro žádné $\lambda > 1$ neplatí $u^\lambda + v^\lambda = w^\lambda + z^\lambda$.

Úloha 2. Buď X konečná množina a k přirozené číslo. Dokažte, že

$$\sum |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = (2^k - 1) \sum |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|$$

kde sumy uvažujeme přes všechny možné k-tice $A_1, \ldots, A_k \subseteq X$.

Úloha 3. Buď n přirozené číslo. Určete počet dvojic (P, Q) polynomů s reálnými koeficienty takových, že

$$(P(X))^2 + (Q(X))^2 = X^{2n} + 1$$

a $\deg P < \deg Q$.

Úloha 4. Řekneme, že konečná posloupnost p se vyskytuje *celkem často* v nekonečné poslopupnosti $x_1, x_2, \ldots$, pokud

$$\liminf_{n\to\infty} \tfrac{V(n)}{n} > 0,$$

kde $V(n)$ počet výskytů p v $(x_1, \ldots, x_n)$. Existuje nekonečná posloupnost, v níž se každá konečná posloupnost nul a jedniček vyskytuje celkem často?

Úloha 5. Nechť $F_0 = F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ je Fibonacciho posloupnost. Dokažte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3F_n^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Úloha 6. Nechť a, b, c jsou celá čísla. Definujme posloupnost $\{x_n\}_{n\geq 0}$ takto: $x_0 = 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3b$ a $x_{n+3} = ax_{n-1} + bx_n + cx_{n+1}$ pro všechna přirozená čísla n. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m a pro každé prvočíslo p je číslo x_{p^m} dělitelné p.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

2nd home series

Solutions will be presented at the seminar on March 24, 2025.

Problem 1. Let u, v, w, z be distinct positive integers such that $u+v = w+z$. Prove that $u^\lambda + v^\lambda = w^\lambda + z^\lambda$ does not hold for any $\lambda > 1$.

Problem 2. Let X be a finite set and k a positive integer. Prove that

$$\sum |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = (2^k - 1) \sum |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|$$

where the sums are over all choices of $A_1, \ldots, A_k \subseteq X$.

Problem 3. Let n be a positive integer. Find the number of pairs (P, Q) of polynomials with real coefficients such that

$$(P(X))^2 + (Q(X))^2 = X^{2n} + 1$$

and $\deg P < \deg Q$.

Problem 4. Let $F_0 = F_1 = 1$ and $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ be the Fibonacci sequence. Prove

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{3F_n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Problem 5. We say that a finite sequence p occurs *quite often* in an infinite sequence $x_1, x_2, \ldots$ if

$$\liminf_{n\to\infty} \tfrac{V(n)}{n} > 0,$$

where $V(n)$ is the number of occurences of p in $(x_1, \ldots, x_n)$. Is there an infinite sequence, in which every finite sequence of zeros and ones occures quite often?

Problem 6. Let a, b, c be 3 integers and define the sequence $\{x_n\}_{n\geq 0}$ by $x_0 = 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3b$ and $x_{n+3} = ax_{n-1} + bx_n + cx_{n+1}$ for all positive integers n. Prove that for all positive integers m, and for all primes p the number x_{p^m} is divisible by p.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`