2. soutěžní série – řešení

1. Spárujeme je. Trojúhelníku s obvodem 2025 prodloužíme každou stanu o 1. Naopak trojúhelníku s obvodem 2028 každou o 1 zkrátíme. Trojúhelníková nerovnost zůstane platit: $a+b+c$ je sudé, takže pokud $a+b-c > 0$, tak $a+b-c > 1$, takže i $(a-1)+(b-1)-(c-1) > 0$.

2. Postavíme čtyřstěn na stůl na hranu AB tak, aby vrcholy C a D byly stejně vysoko nad stolem. Pak jejich kolmé průměty C', D' do roviny stolu leží stejně daleko od přímky AB (každý v jiné polorovině), protože výšky v trojúhelníkách ABC, ABD na společnou základnu AB jsou shodné. Podobně jsou shodné výšky v CDA, CDB na společnou základnu CD, tj. A a B leží stejně daleko od $C'D'$. Tedy úsečky AB a $C'D'$ se navzájem půlí, a proto $AC'BD'$ musí být rovnoběžník. Odtud už plyne, že $|AD| = |BC|$ a $|AC| = |BD|$. Položíme-li čtyřstěn na jinou hranu, dokážeme, že i $|AB| = |CD|$.

3. Dokazujeme, že lineární zobrazení $X \mapsto MX+XN$ není na celé $T^{n\times n}$. Stačí dokázat, že se nějaké nenulové X zobrazí na nulu. Matice M, N jsou singulární, takže mají nenulové vektory $u, v \in T^n$ v jádře: $Mu = 0, v^T N = 0$. Pak se $X = uv^T$ zobrazí na nulu.

4. Hledaná množina je $M = \{\alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha \geq 3\sqrt{3}/2\}$. Pro $x_n = t^n$ dostaneme geometrickou řadu se součtem $\frac{t^3}{t^2-1}$. Tato funkce nabývá svého minima $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ pro $t = \sqrt{3}$, jak se snadno přesvědčíme zderivováním, a nabývá všech hodnot $\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (Darbouxova vlastnost). Nyní ukážeme, že součet řady nemůže být menší. Posloupnost x_n je rostoucí, tj. má limitu. Kdyby limita byla vlastní, řada by divergovala, tj. $x_n \to +\infty$. Platná nerovnost $(x_{n+1} - \sqrt{3}x_n)^2(x_{n+1} + \sqrt{3}/2x_n) \geq 0$ implikuje

$$\frac{x_{n+1}}{x_n^3} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n+1}^2}\right).$$

Odtud máme (po sečtení teleskopické řady na pravé straně, s využitím $x_n \to +\infty$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n^3} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

web: http://karlin.mff.cuni.cz/resitel