2. soutěžní série

11. 3. 2024

Úloha 1. Ukažte, že pro každé $n \geq 2$ přirozené existuje spojité zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pro něž h^n je omezené, ale h^k, $k = 1, \ldots, n-1$ jsou neomezená. Symbolem h^k rozumíme k-násobné složení zobrazení h.

Úloha 2. Buď S množina všech přirozených čísel, která nejsou dělitelná žádným prvočíslem větším než 3. Ukažte, že každé přirozené číslo je součtem několika (může být jen jeden) různých prvků S, z nichž žádný není násobkem jiného.

Úloha 3. Buď M alespoň dvouprvková konečná množina. Najděte binární operaci $\circ$ na M umožnující krácení zprava, která není nikde asociativní. Tj.

$$\forall a, b, c \in M : \ [(a \circ c = b \circ c) \Rightarrow (a = b)] \ \& \ [a \circ (b \circ c) \neq (a \circ b) \circ c].$$

Úloha 4. Pro každou dvojici (α, β) nezáporných reálných čísel splňujících $\alpha + \beta \geq 2$ najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y$$

pro všechna reálná x, y.

2nd contest series

11. 3. 2024

Problem 1. Show that for every integer $n \geq 2$ there exists a continuous mapping $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ such that h^n is bounded but h^k, $k = 1, \dots, n-1$ are unbounded. By h^n we understand the n-fold composition of the mapping h.

Problem 2. Let S be the set of all positive integers that are not divisible by any prime larger than 3. Show that each positive integer is the sum of some distinct elements (it can be just one) from S, such that no summand is a multiple of any other.

Problem 3. Let M be a finite set with at least 2 elements. Find a binary operation $\circ$ on M that allows right cancellation and is nowhere associative, i.e.

$$\forall a, b, c \in M : \; [(a \circ c = b \circ c) \Rightarrow (a = b)] \;\&\; [a \circ (b \circ c) \neq (a \circ b) \circ c].$$

Problem 4. For each pair (α, β) of non-negative reals with $\alpha + \beta \geq 2$, determine all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, such that

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y$$

for all reals x, y.