2. soutěžní série

10. 3. 2025

Úloha 1. Označme T_n počet různých (tj. navzájem neshodných) trojúhelníků s celočíselnými délkami stran a obvodem n. Dokažte, že $T_{2025} = T_{2028}$. (5 bodů)

Úloha 2. Když mají stěny čtyřstěnu všechny stejný obsah, tak už jsou navzájem shodné. Dokažte. (10 bodů)

Úloha 3. Buď $T^{n\times n}$ množina všech $n \times n$ matic nad tělesem T. Nechť jsou $M, N \in T^{n\times n}$ singulární. Dokažte, že existuje $B \in T^{n\times n}$ taková, že rovnice

$$MX + XN = B$$

nemá žádné řešení $X \in T^{n\times n}$. (10 bodů)

Úloha 4. Určete množinu všech reálných čísel α, která lze vyjádřit ve tvaru

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n^3},$$

kde $x_0, x_1, x_2, \dots$ je rostoucí posloupnost reálných čísel a $x_0 = 1$. (15 bodů)

2nd contest series

March 10, 2025

Problem 1. Denote T_n the number of distinct (non-congruent) triangles with integer-valued side lengths and perimeter n. Prove $T_{2025} = T_{2028}$. (5 points)

Problem 2. If all faces of a tetrahedron have the same area, then they are congruent. Prove. (10 points)

Problem 3. Let $T^{n\times n}$ be the set of $n \times n$ matrices over the field T. Let $M, N \in T^{n\times n}$ be singular. Prove that there exists $B \in T^{n\times n}$ such that the equation

$$MX + XN = B$$

has no solution $X \in T^{n\times n}$. (10 points)

Problem 4. Determine the set of real numbers α that can be expressed in the form

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n^3}$$

where $x_0, x_1, x_2, \ldots$ is an increasing sequence of real numbers with $x_0 = 1$. (15 points)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`