3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 7.4.2025

Úloha 1. Najděte nejmenší kladné celé číslo, které se nedá vyjádřit ve tvaru $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$, kde a, b, c, d jsou kladná celá čísla.

Úloha 2. Buď A reálná ortogonální matice a 1 není její vlastní číslo. Matici B získáme tak, že jeden řádkový nebo sloupcový vektor matice A nahradíme vektorem opačným. Ukažte, že 1 je vlastním číslem matice B.

Úloha 3. Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}.$$

Úloha 4. Najděte nejmenší k takové, že libovolná množina k různých přímek v $\mathbb{R}^3$ obsahuje 3 navzájem rovnoběžné přímky nebo 3 přímky procházející týmž bodem nebo 3 navzájem mimoběžné přímky.

Úloha 5. Buď ABC trojúhelník s celočíselnými délkami stran a obvodem 2021. Dále buď O střed kružnice opsané, I střed kružnice vepsané a H průsečík výšek trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že body A a I leží na ose úsečky OH. Určete délku úsečky BC.

Úloha 6. Město Čtverec Králové je tvořeno několika políčky nekonečné čtvercové tabulky. Je souvislé a bez děr (Z každého pole Čtverce se dá dostat na každé jiné přecházením na pole, které sousedí hranou, aniž cesta vyjde ze Čtverce. Totéž platí pro doplněk Čtverce). Jednou bylo na podporu turistického ruchu rozhodnuto spojit středy některých hranou sousedících polí tak, aby vznikla oboustranně nekonečná silnice, která navštíví každé pole nekonečné tabulky právě jednou. Radní Čtverce Králové si všimli, že jakkoliv se tato silnice naplánuje, projde hranicí města vždy stejněkrát. Jaké všechny tvary může mít Čtverec Králové?

3rd home series

Solutions will be presented at the seminar on April 7, 2025.

Problem 1. Determine the least positive integer that cannot be written in the form $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$, where a, b, c, d are positive integers.

Problem 2. Let A be a real orthogonal matrix without eigenvalue 1. Let B be obtained from A by replacing one of its rows or one of its columns by its negative. Show that B has 1 as an eigenvalue.

Problem 3. Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}.$$

Problem 4. Find the minimal k such that every set of k different lines in $\mathbb{R}^3$ contains either 3 mutually parallel lines or 3 mutually intersecting lines or 3 mutually skew lines.

Problem 5. Let ABC be a triangle with circumcenter O, incenter I, orthocenter H, sides of integer length, and perimeter 2021. Suppose that the perpendicular bisector of OH contains A and I. Find the length of BC.

Problem 6. The city of Čtverec Králové consists of several fields of an infinite square grid. It is connected and without holes (From each field of Čtverec it is possible to get to any other field by passing to an adjacent field in each step and not leaving Čtverec. The same holds for the complement of Čtverec). Once, to promote tourism, it was decided to connect the centers of some adjacent fields so that a two-sided infinite road would be created, which would visit each field of the infinite grid exactly once. The councilors of Čtverec Králové noticed that no matter how this road was planned, it would always pass through the city border the same number of times. What are all the possible shapes of Čtverec Králové?