5. soutěžní série – řešení

1. Z každého bloku 2×2 mohli pokácet nejvýše jeden strom, proto nemohli pokácet více než 2500 stromů. Naopak pokud by pokáceli každý strom s oběma souřadnicemi liché parity, pak z žádného z 2500-ti pařezů nebude vidět jiný. Rozdíl souřadnic pařezů (a, b), (c, d) musí být tvaru $(c - a, d - b) = (2^n k, 2^n l)$, $n \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, kde alespoň jedno z čísel k, l je liché. Pak strom $(a + k, b + l)$ je mezi pařezy (a, b), (c, d) a nebyl pokácen.

2. Z nezápornosti pravé strany plyne $p(a) \neq 0$. Dále uvažujme jen čísla $x \in \mathbb{R}$, která nejsou kořeny p. Důkaz provedeme nepřímo. Nechť jsou všechny kořeny p reálné, pak $p(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Podle Leibnizova pravidla je $\frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$. Opětovnou derivací vyjde

$$\frac{p''(x)p(x) - p'(x)^2}{p(x)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{(x - x_i)^2} < 0,$$

odkud plyne, že nesmí existovat číslo a, pro které $p''(a)p(a) - p'(a)^2 \geq 0$.

3. Ano, f je nutně diferencovatelná v 0. Protože fg a f/g jsou diferencovatelné, je jejich součin f^2 diferencovatelný. Pokud $f(0) \neq 0$, pak je f na okolí nuly kladná nebo záporná a funkce $f = \sqrt{f^2}$, resp. $f = \sqrt{-f^2}$ je diferencovatelná (složení diferencovatelných). Pokud naopak $f(0) = 0$, je $(f/g)(0) = 0$, a tedy

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(0)}{x - 0} g(x) = (f/g)'(0)g(0),$$

tj. $f'(0)$ existuje a je rovna $(f/g)'(0)g(0)$.

4. Pro $d \geq n$ umíme najít protipříklad - n čísel dávajících zbytek 1 modulo d. Pak žádná podmnožina není d-dobrá. K $d = n - 1$ také umíme najít protipříklad - jeden prvek položíme dělitelný d a zbylé položíme kongurentní 1 modulo d. Pak jsou jen tři d-dobré podmnožiny.

Nyní ukážeme, že $d = n - 2$ funguje. Všimněme si, že pro každá d-prvková množnina má d-dobrou podmnožinu. To proto, že pokud má tato množina prvky $x_1, x_2, \ldots, x_d$, pak buď některý ze součtů x_1, $x_1 + x_2$, $x_1 + x_2 + x_3$, $\ldots$, $x_1 + \cdots + x_d$ je dělitelný d (a pak jsme hotovi), nebo dva z nich dávají stejný zbytek modulo d, tj pro nějaké $0 < k < \ell \leq d$ je $x_1 + \cdots + x_k \equiv x_1 + \cdots + x_\ell \pmod{d}$, čili $d \mid x_{k+1} + \cdots + x_\ell$ a máme hotovo.

Označme si naši množinu jako S. Pokud má S dvě disjunktní d-dobré podmnožiny S_1 a S_2, pak $S_3 = S_1 \cup S_2$ je další taková množnina. Nyní pokud $x_1 \in S_1$ a $x_2 \in S_2$, pak $S \setminus \{x_1, x_2\}$ má d prvků, čili umíme najít její d-dobrou podmnožinu S_4. Protože $x_1, x_2 \notin S_4$, je S_4 různá od dříve nalezených množin.

Nakonec předpokládejme, že každé dvě d-dobré podmnožiny S mají neprázdný průnik. Nechť $a, b \in S, a \neq b$. Nalezneme d-dobrou $S_1 \subset S \setminus \{a, b\}$. Nechť $x \in S_1$. Pak nalezneme d-dobrou $S_2 \subset S \setminus \{x, b\}$, a ta musí být různá od S_1. Nechť $y \in S_2$. Pak nalezneme d-dobrou $S_3 \subset S \setminus \{x, y\}$. Ta zjevně musí být různá od S_1 i S_2. Nakonec z předpokladu víme, že existuje $z \in S_2 \cap S_3$, a nalezneme d-dobrou $S_4 \subset S \setminus \{x, z\}$, která zjevně musí být různá od S_1, S_2, S_3.