5. soutěžní série

29. 4. 2024

Úloha 1. Ve čtvercovém lesíku tvořeném 100×100 stromy lesníci několik stromů pokáceli, a to tak, že z žádného pařezu nebyl vidět jiný pařez. Kolik nejvíce stromů mohli pokácet? (Stromy mají nulový průměr.) (5 bodů)

Úloha 2. Je dán reálný polynom p. Ukažte, že pokud existuje $a \in \mathbb{R}$, pro které $p(a)p''(a) > p'(a)^2$, pak některé kořeny p nejsou reálné. (10 bodů)

Úloha 3. Jsou dány reálné funkce f a g definované na okolí nuly. Funkce g je nenulová a spojitá v nule, funkce fg a $\frac{f}{g}$ jsou diferencovatelné v nule. Plyne odtud, že f je diferencovatelná v nule? Diferencovatelná zde znamená, že existuje vlastní derivace. (10 bodů)

Úloha 4. Množina čísel je *d-dobrá*, pokud je neprázdná a součet jejích prvků je násobkem d. K danému přirozenému číslu $n \geq 4$ najděte největší d, aby libovolná n-prvková množina přirozených čísel měla 4 různé (ne nutně disjunktní) d-dobré podmnožiny. (15 bodů)

5th contest series

April 29, 2024

Problem 1. In a square forest consisting of 100×100 trees, the foresters cut down some of the trees in such a way, that no stump could be seen from another stump. How many trees at most could they cut down? (Trees have zero diameter.) (5 points)

Problem 2. A real polynomial p is given. Show that if there exists $a \in \mathbb{R}$ such that $p(a)p''(a) > p'(a)^2$, then some roots of p are real.
(10 points)

Problem 3. Real functions f and g are defined on a neighborhood of zero. Function g is non-zero and continuous at zero, functions fg and $\frac{f}{g}$ are differentiable at zero. Can we conclude that f is differentiable at zero? Here differentiable means that the derivative exists and is finite.
(10 points)

Problem 4. We call a set of positive integers *d-good*, if it is not empty and the sum of its elements is a multiple of d. For a given positive integer $n \geq 4$ find the largest d such that any n-element set of positive integers has 4 distinct (not necessarily disjoint) d-good subsets.
(15 points)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`