6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 20. 5. 2024

Úloha 1. Nechť $z \in \mathbb{C}$ a nechť $A \in M_n(\mathbb{C})$ je regulární matice. Ukažte, že existuje $B \in M_n(\mathbb{C})$ splňující $AB - zBA = I_n$ právě když $z \neq 1$. (I_n značí jednotkovou matici řádu n.)

Úloha 2. Ukažte, že každé celé číslo $n > 1$ má násobek menší než n^4, jehož desítkový zápis obsahuje nejvýše čtyři různé číslice.

Úloha 3. Nechť a_n, $n = 1, 2, \ldots$ jsou přirozená čísla taková, že $\sum \frac{1}{a_n}$ konverguje. Označme b_n počet čísel a_k, která splňují $a_k \leq n$. Dokažte $\lim \frac{b_n}{n} = 0$.

Úloha 4. Dokažte nebo vyvraťte: Pro $y > x > 0$ platí $y^{x^y} > x^{y^x}$.

Úloha 5. Uvažujme funkce $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že z $f^{-1}(k) = \{i : f(i) = k\} \neq \emptyset$ plyne $f^{-1}(\ell) \neq \emptyset$, $\ell = 1, 2, \ldots, k-1$. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ je počet takových funkcí

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}.$$

Úloha 6. V rovině jsou dány nekolineární body A_0, B_0, C_0 a přímka p, která protíná přímky B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 po řadě v bodech A^*, B^*, C^*. Pro $n \geq 1$ označme A_n průsečík přímek B^*B_{n-1} a C^*C_{n-1} a analogicky definujme B_n a C_n. Ukažte, že posloupnosti (A_n), (B_n) a (C_n) konvergují a najděte jejich limity.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

6th home series

Solutions will be presented at the seminar on May 20, 2024.

Problem 1. Let $z \in \mathbb{C}$ and let $A \in M_n(\mathbb{C})$ be a regular matrix. Show that there exists $B \in M_n(\mathbb{C})$ such that $AB - zBA = I_n$ if and only if $z \neq 1$. (I_n denotes the $n \times n$ identity matrix.)

Problem 2. Show that every positive integer $n > 1$ has a multiple less than n^4, whose decadic representation contains at most four distinct digits.

Problem 3. Let a_n, $n = 1, 2, \ldots$ be positive integers such that $\sum \frac{1}{a_n}$ converges. Denote b_n the count of numbers a_k that satisfy $a_k \leq n$. Prove $\lim \frac{b_n}{n} = 0$.

Problem 4. Prove or disprove: for $y > x > 0$ we have $y^{x^y} > x^{y^x}$.

Problem 5. Let us consider functions $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ satisfying: $f^{-1}(k) = \{i : f(i) = k\} \neq \emptyset$ implies $f^{-1}(\ell) \neq \emptyset$, $\ell = 1, 2, \ldots, k-1$. Prove that for $n \in \mathbb{N}$ the number of such functions is equal to

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}.$$

Problem 6. In the plane, noncollinear points A_0, B_0, C_0 and a line p are given. Let p meets lines B_0C_0, C_0A_0, and A_0B_0 at A^*, B^*, and C^*, respectively. For $n \geq 1$, denote A_n the intersection of B^*B_{n-1} with C^*C_{n-1}, and define B_n and C_n similarly. Show that sequences (A_n), (B_n) and (C_n) converge, and describe their respective limits.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`