6. soutěžní série – řešení

1. Označme $A = \sum_{i=1}^n a_i$, $B = \sum_{i=1}^n b_i$. Pro velmi velká t platí $\sum_{i=1}^n (t - a_i) \leqslant \sum_{i=1}^n (t - b_i)$, tj. $nt - A \leq nt - B$, tj. $B \leq A$. Pro hodně záporná t platí $\sum_{i=1}^n (a_i - t) \leqslant \sum_{i=1}^n (b_i - t)$, tj. $A - nt \leq B - nt$, tj. $A \leq B$.

2. Ze spektrální věty pro symetrické matice platí, že pokud z vlastních vektorů A příslušných postupně vlastním číslům a, b, c Vytvoříme (po sloupcích) matici Q, pak $A = Q \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} Q^T = QDQ^T$. Potom $f(A) = Q \begin{pmatrix} b+c & 0 & 0 \\ 0 & c+a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} Q^T = Q(\mathrm{Tr}(A)I - D)Q^T = Q(\mathrm{Tr}(A)Q^T - DQ^T) = \mathrm{Tr}(A)I - A$. Zjevně $\mathrm{Tr}(f(A)) = 2\mathrm{Tr}(A)$, tedy $\mathrm{Tr}(f^n(A)) = 2^n \mathrm{Tr}(A)$. Z toho jednoduchou indukcí plyne $f^n(A) = \begin{cases} \frac{2^n-1}{3}\mathrm{Tr}(A)I + A & \text{pokud} n \equiv 0 \pmod 2 \\ \frac{2^n+1}{3}\mathrm{Tr}(A)I - A & \text{pokud} n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$.
Nulové prvky se zjevně mohou objevit jen na diagonále. Ukážeme, že to se může stát nanejvýš dvakrát. Pokud $\mathrm{Tr}(A) = 0$, jsme hotovi. Dále nechť $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. Pokud se objeví třikrát u stejné parity (dejme tomu pro sudé n - pro tři liché by se postupovalo stejně), pak musí být postupně u všech tří prvků, takže existují kladná x, y, z, že $x(a+b+c) + a = 0$, $y(a+b+c) + b = 0$, $z(a+b+c) + c = 0$, a sečtením těchto rovností dostaneme spor s $a + b + c \neq 0$. Takže nulový prvek se musí objevit dvakrát u jedné parity a jednou u druhé - předpokládejme, že se dvakrát objeví u sudého n a jednou u lichého, v opačném případě bychom postupovali analogicky. Podobně jako výše (jen místo x, y, z budeme používat konkrétní hodnoty, a musíme správně sčítat a odečítat, abychom mohli vydělit $a+b+c$) dostaneme $\frac{2^\alpha+1}{3} + 1 = \frac{2^\beta-1}{3} + \frac{2^\gamma-1}{3}$ pro nějaká kladné liché α a kladná sudá β, γ. Úpravou dostaneme $2^\alpha + 6 = 2^\beta + 2^\gamma$, což z binárního zápisu zjevně není možné.

Tedy odpověď je nanejvýš dvě, a to je možné - např pro $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \pi & \pi \\ \pi & 5 & \pi \\ \pi & \pi & -7 \end{pmatrix}$.

3. Nechť je p nekonstantní. Vlastnost se zachová po přenásobení p racionálním číslem a přičtení konstanty. Nechť tedy bez újmy na obecnosti máme celočíselný polynom $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ s kladným vedoucím členem $a_n > 0$. Pro dostatečně velké $c \in \mathbb{N}$ bude mít $p - a_0 - c$ jeden kladný reálný kořen $x > 1$. Dle předpokladu $x \in \mathbb{Q}$. Racionální kořen celočíselného polynomu může být pouze tvaru $x = \pm\frac{d_0}{d_n}$, kde $d_0 | a_0 - a_0 - c = -c$ je konstantní koeficient polynomu a $d_n | a_n$ je vedoucí koeficient polynomu. Postupně volme $c \in \mathbb{P}$ prvočísla a pro některé d_n získáme nekonečně mnoho kořenů $x_c = \frac{c}{d_n}$. Z $p(\frac{c}{d_n}) - a_0 - c = q(c) = 0$ pro nekonečně mnoho c plyne, že q je konstantní nula, neboli stupeň p je 1.

4. Posloupnost je rostoucí a neomezená, proto uvažujme jen $a, b > 0$. Ze Stolzovy věty za předpokladu, že všechny limity existují, plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{an^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{a(n+1)^b - an^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{1/3}}{abn^{b-1}} = 1 = 1^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{(abn^{b-1})^3}.$$

Jediné možné hodnoty parametrů splňují $a = (ab)^3$, $b = 3(b-1)$, $b = \frac{3}{2}$, $a = (2/3)^{3/2}$. Pro jejich potvrzení si zaveďme $a_n = x_n n^{-3/2}$ a ukážeme $a_n \to (2/3)^{3/2}$. Zvolme $\varepsilon > 0$, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq N$ bude $\frac{3}{2} - \varepsilon < [(1 + \frac{1}{n})^{3/2} - 1]n < \frac{3}{2} + \varepsilon$. Pokud $a_n < (\frac{3}{2} + \varepsilon)^{-3/2}$, pak $(\frac{3}{2} + \varepsilon)a_n < a_n^{1/3}$ a vyjdou nerovnosti

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + x_n^{1/3} = a_n n^{3/2} + a_n^{1/3} n^{1/2} > a_n n^{3/2} + (\frac{3}{2} + \varepsilon) a_n n^{1/2} \\ &> a_n n^{3/2} + ((1 + \frac{1}{n})^{3/2} - 1) n a_n n^{1/2} = a_n n^{3/2} (1 + \frac{1}{n})^{3/2} = a_n (n+1)^{3/2}, \end{aligned}$$

$a_{n+1} > a_n$. Posloupnost tedy buď bude růst nad hodnotu $(\frac{3}{2}+\varepsilon)^{-3/2}$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq (\frac{3}{2}+\varepsilon)^{-3/2}$, nebo bude od nějakého indexu monotonní s limitou menší než $(\frac{3}{2}+\varepsilon)^{-3/2}$, což by byl spor s jedinou možnou limitou $a = (2/3)^{3/2}$ dle Stolzovy věty. Obdobně lze z opačné strany ukázat $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq (\frac{3}{2}-\varepsilon)^{-3/2}$. To platí pro libovolné $\varepsilon > 0$, tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = (2/3)^{3/2}$.