

2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 12. 3. 2014.

Úloha 1. Uvažme (vrcholově) 2-souvislý graf s dvěma kružnicemi maximální velikosti. Dokažte, že tyto kružnice mají alespoň dva společné vrcholy.

Úloha 2. Ukažte, že

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{\pi j}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Úloha 3. Buď t přirozené číslo a označme

$$\gamma = \sqrt{t^2 + 4}, \quad \alpha = \frac{1}{2}(2 + \gamma - t) \quad \text{a} \quad \beta = \frac{1}{2}(2 + \gamma + t).$$

Ukažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$\lfloor n\beta \rfloor = \lfloor (\lfloor n\alpha \rfloor + n(t-1))\alpha \rfloor + 1 = \lfloor (\lfloor n\alpha \rfloor + n(t-1) + 1)\alpha \rfloor - 1.$$

Úloha 4. Nechť A, B jsou čtvercové komplexní Hermitovské matice a A je pozitivně definitní. Dokažte, že vlastní čísla AB jsou reálná.

Úloha 5. Spočtete

$$\sup \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n \sin(t^2) f(t) dt : f \in C(\mathbb{R}), \|f\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Úloha 6. Nechť G je nekonečná nekomutativní grupa, která obsahuje vlastní normální podgrupu H takovou, že G/H je komutativní. Dokažte, že existuje vlastní nekonečná normální podgrupa G .