6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 7. 5. 2014.

Úloha 1. Do tabulky $n \times n$ ($n \geq 4$ sudé) napíšeme čísla tak, že každé napsané se v tabulce vyskytuje právě dvakrát. Dokažte, že existuje permutace $\pi \in S_n$ taková, že čísla na políčkách

$$(1, \pi(1)); (2, \pi(2)); \ldots; (n, \pi(n))$$

jsou po dvou různá.

Úloha 2. Buď I otevřený interval a $f \in C^1(I)$ splňující $f = \varphi \circ f'$ pro nějakou spojitou funkci φ. Ukažte, že f je konvexní nebo konkávní.

Úloha 3. Označme S okruh všech polynomů s komplexními koeficienty, jejichž absolutní člen je reálný. Dokažte, že každý nenulový ideál S je buď hlavní, nebo generovaný dvěma polynomy téhož stupně.

Úloha 4. Přirozené číslo n nazveme b-normální, jestliže se v b-dickém zápisu čísla n vyskytují všechny cifry $1, 2, \ldots, b-1$ stejněkrát. Označme N_b množinu všech b-normálních čísel. Najděte všechna b, pro která

$$\sum_{n \in N_b} \frac{1}{n} < +\infty.$$

Úloha 5. Buď $M_n = (m_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ matice $(n-1) \times (n-1)$ s prvky $m_{ij} = -1$, pokud $j \mid (i+1)$, a $m_{ij} = 0$ jinak. Vypočtěte $\det M_{2014}$.

Úloha 6. Mějme $n \in \mathbb{N}$ identických mincí rozdělených do několika hromádek. Tah znamená vzít z každé hromádky po jedné minci a z těchto mincí vytvořit novou hromádku. Po kolika tazích se dostaneme na začátek nějakého cyklu, jestliže na začátku je všech n mincí na jedné hromádce? Např. pro $n = 5$ máme

$$5 \to 4|1 \to \underline{3|2} \to 2|2|1 \to 3|1|1 \to \underline{3|2} \to \ldots,$$

takže na začátek cyklu (podtržený) jsme se z výchozího nastavení dostali po dvou tazích.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`