

# 1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 2. 3. 2015

**Úloha 1.** Necht'  $A$  je komplexní  $n \times n$  matice taková, že součet každého sloupce je 1. Dokažte, že pokud její vlastní vektor  $(x_1, \dots, x_n)^T$  splňuje  $x_1 + \dots + x_n \neq 0$ , pak je vlastní číslo jemu příslušné rovno 1.

**Úloha 2.** Nalezněte všechna přirozená čísla  $n$  taková, že

$$n + 2^n \mid n + 8^n.$$

**Úloha 3. (seriál 2)** Sečtěte řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}.$$

**Úloha 4.** V tabulce  $n \times n$  jsou napsána čísla  $1, 2, \dots, n^2$  (každé jednou). Ukažte, že existují dvě sousední políčka, jejichž čísla se liší aspoň o  $n$ .

**Úloha 5.** Libovolné čtverce (konečný či nekonečný počet) o celkovém obsahu 1 lze umístit do čtverce o obsahu 2 tak, aby se (jejich vnitřky) nepřekrývaly. Dokažte.

**Úloha 6.** Funkce  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  je stejnoměrnou limitou polynomů s nezápornými koeficienty. Ukažte, že  $g$  musí být analytická. Je to pravda i pro funkce definované na  $(-1, 0)$  místo  $(0, 1)$ ?