Řešení 5. soutěžní série

1. Let us write $n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n$. Since all the numbers are positive, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-4)!} + 6\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 7\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 15e.$$

2. Na začátku obarvíme číslo 1 červeně, všechna ostatní čísla modře a postupně některá obarvujeme na červeno. Všech aritmetických posloupností je jen spočetně mnoho, tedy očíslujeme si je přirozenými čísly. V i-tém kroku vždy uvažme nejvyšší červené číslo m (můžeme, protože jsme obarvili jen i čísel) a obarvíme na červeno libovolné číslo i-té posloupnosti, které je vyšší než $2m$ (existuje, protože posloupnost je nekonečná). Tím každou aritmetickou posloupnost někdy zařízneme (tedy žádná nebude celá modrá). Navíc, nově obarvené červené číslo je vždy od ostatních dosud obarvených červených čísel dál než jsou všechny vzdálenosti mezi nimi, takže tím nevznikne tříprvková červená aritmetická posloupnost.

3. Let $v_1, \ldots, v_k$, $k < n+1$ be linearly dependent and let it be a minimal set with this property, i.e. $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = 0$ and all λ_j are nonzero. If all λ_j were positive, we obtain a contradiction

$$0 = (v_{n+1}, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (v_{n+1}, v_j) < 0.$$

Similarly, if they are all negative. Let $I := \{j : \lambda_j > 0\}$ and $J = \{j : \lambda_j < 0\}$, they are both nonempty. Then $\sum_{j\in I} \lambda_j v_j = \sum_{j \in J} -\lambda_j v_j$ and take a scalar product of this equality with its right-hand side:

$$(\sum_{j\in I} \lambda_j v_j, \sum_{j\in J} -\lambda_j v_j) = \| \sum_{j\in J} -\lambda_j v_j \|^2 > 0.$$

But the left-hand side is negative, which is a contradiction.

4. It is enough to consider only polynomials with leading coefficient 1. Let $P(z) = (z - \alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$ with $|\alpha_j| = 1$, where the complex numbers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ may coincide. We have

$$\begin{aligned}\tilde{P}(z) = 2zP'(z) - nP(z) = (z+\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n) + \\ + (z-\alpha_1)(z+\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n) + \cdots + (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z+\alpha_n).\end{aligned} \tag{1}$$

Hence, $\dfrac{\tilde{P}(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{z+\alpha_k}{z-\alpha_k}$ Since $\Re \dfrac{z+\alpha}{z-\alpha} = \dfrac{|z|^2-\alpha^2}{|z-\alpha|^2}$ for all complex z, α, $z \neq \alpha$, we deduce that in our case $\Re \dfrac{\tilde{P}(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|z|^2-1}{|z-\alpha_k|^2}$. >From $|z| \neq 1$ it follows that $\Re \dfrac{\tilde{P}(z)}{P(z)} \neq 0$. Hence $\tilde{P}(z) = 0$ implies $|z| = 1$.