2. soutěžní série

9. 3. 2014

Úloha 1. Reálná $n \times n$ matice má za prvky pouze 1 nebo -1. Dokažte, že její determinant je násobkem 2^{n-1}.

Úloha 2. Pro rozklad π množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (na systém disjunktních podmnožin, jejichž sjednocení je celá množina M) označme $\pi(x)$ počet prvků té podmnožiny rozkladu, která obsahuje x. Dokažte, že pro libovolné dva rozklady π a π' existují dvě různá čísla x, $y \in M$, pro která $\pi(x) = \pi(y)$ a $\pi'(x) = \pi'(y)$.

Úloha 3. Buď G grupa a H její podgrupa s následující vlastností: kdykoliv jsou nějaké dva prvky G konjugované, můžeme za konjugující prvek vzít nějaký prvek H. Přesněji:

$$(\forall x, y, g \in G)\left(x = gyg^{-1} \Rightarrow (\exists h \in H)\, x = hyh^{-1}\right).$$

Dokažte, že H obsahuje všechny komutátory G, tj. prvky tvaru $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$.

Úloha 4. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reálná posloupnost splňující

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1.$$

Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n \sqrt[3]{3n} = 1$.

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`