

3. domácí série

30. 3. 2015

Úloha 1. Publikum si zvolí dvě z pěti karet 1, 2, 3, 4, 5 a asistent kouzelníka následně vybere dvě karty ze zbývajících tří. Tyto dvě karty následně člen publika donese ukázat kouzelníkovi (který nemá žádné jiné informace) a kouzelník na základě nich určí, které dvě karty si zvolilo publikum. Jak se kouzelník s asistentem mohli dohodnout?

Úloha 2. Najděte funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje $f(0) = f'(0) = 2015$ a $f(x) > f'(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nebo ukažte, že taková funkce neexistuje.

Úloha 3. Na úsečce běhá několik běžců konstantní rychlostí. Začínali všichni na jednom konci a vždy, když někdo doběhne na konec, okamžitě se rozeběhne na opačnou stranu. Po nějaké době se všichni běžci potkali na jednom místě. Dokažte, že se to stalo ještě později znovu.

Úloha 4. Polynom stupně n nad reálnými čísly nabývá celočíselných hodnot na $n + 1$ po sobě jdoucích celých číslech. Dokažte, že nabývá celočíselných na všech celých číslech.

Úloha 5. (seriál 2) Buď $n \in \mathbb{N}$. Sečtěte řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)\dots(k+n)}.$$

Úloha 6. (seriál 1) Pro nezáporné celé m a přirozené n sečtěte

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$