3. soutěžní série

23. 3. 2015

Úloha 1. Nechť f je bijekce na konečné množině X. Dokažte, že počet množin $A \subseteq X$ takových, že $f(A) = A$, je mocnina dvou.

Úloha 2. (seriál 2) Sečtěte řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+\frac{1}{2})}.$$

Úloha 3. Buď $P(x)$ polynom stupně n splňující $P(x) = Q(x)P''(x)$, kde $Q(x)$ je nějaký kvadratický polynom a $P''(x)$ je druhá derivace $P(x)$. Ukažte, že pokud má $P(x)$ aspoň dva různé kořeny, pak má n různých kořenů.

Úloha 4. Nechť A, B jsou (komplexní) hermiteovské $n \times n$ matice. Dokažte, že spolu komutují právě tehdy, když

$$\operatorname{tr} A^2B^2 = \operatorname{tr} (AB)^2.$$