5. domácí série

27. 4. 2015

Úloha 1. Pro $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ a $k \in \{1, \ldots, n\}$ definujme

$$\vec{v}^{\star k} = (v_1, \ldots, v_{k-1}, 0, v_{k+1}, \ldots, v_n).$$

Nechť $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{C}^n$. Dokažte, že existuje takové $k \in \{1, \ldots, n\}$, že i $\vec{v}_1^{\star k}, \ldots, \vec{v}_{n-1}^{\star k}$ jsou lineárně nezávislé.

Úloha 2. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q takových, že

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

Úloha 3. Hráč při každé hře vyhraje jednu korunu, nebo prohraje jednu korunu, oboje s pravděpodobností jedna polovina. Spočtěte střední hodnotu počtu her, po němž bude mít hráč poprvé o k korun méně, než bylo jeho dosavadní maximum.

Úloha 4. Uvažme pět různých bodů $A_1, \ldots, A_5$ v rovině a označme

$$M = \max_{i \neq j} |A_i A_j|, \quad m = \min_{i \neq j} |A_i A_j|.$$

Dokažte, že

$$\frac{M}{m} \geq 2 \sin 54^\circ$$

a rozhodněte, kdy nastává rovnost.

Úloha 5. (seriál 2) Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \log \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right).$$

Úloha 6. Nechť n je přirozené číslo a S systém podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že libovolné dva prvky S mají právě jednoprvkový průnik. Dokažte, že obsahuje S nejvýše n množin.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`