1. domácí série

7. 3. 2016

Úloha 1. Na tabuli je napsáno n různých reálných kladných čísel. V jednom kroku vezmeme dvě čísla x, y a nahradíme je číslem $xy/(x+y)$. Takto pokračujeme, dokud na tabuli nezůstane jediné číslo. Kolik různých čísel takto můžeme dostat?

Úloha 2. Sečtěte
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh 2^n}.$$

Úloha 3. Nechť x, y, z jsou nezáporná racionální čísla taková, že $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ je rovněž racionální číslo. Dokažte, že i $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ a $\sqrt{z}$ jsou racionální.

Úloha 4. Buď A antisymetrická reálná $n \times n$ matice (tj. $A^T = -A$), k přirozené číslo větší než jedna a $x_1, \ldots, x_k \in (0,1)$. Dokažte
$$\det(A+I)^{k-1} \det(A + x_1 \ldots x_k I) \geq \det(A + x_1 I) \ldots \det(A + x_k I).$$

⋆ **Úloha 5.** Do políček tabulky $2^n \times n$ vepíšeme čísla 1 nebo -1 tak, že každá možná n-prvková posloupnost čísel 1 a -1 se nachází v některém řádku. Následně v některých políčkách přepíšeme čísla na nuly. Dokažte, že v takovéto tabulce lze zvolit několik řádků (alespoň jeden) tak, že jejich součet (po prvcích) je nulový řádek.

⋆ **Úloha 6.** Najděte všechny čtveřice přirozených čísel a, k, m, n, které řeší rovnici
$$a^{m+n} + a^n - a^m - 1 = 15^k.$$