2. domácí série

21. 3. 2016

Úloha 1. Uvnitř jednotkového kruhu se středem v počátku se nachází kružnice $k_1, k_2, \dots, k_n$. Přitom počátek leží vně těchto kružnic a součet jejich obvodů je alespoň π. Dokažte, že lze najít kružnici se středem v počátku, která protíná alespoň dvě zadané kružnice $k_1, \dots, k_n$.

Úloha 2. Regulární čtvercová matice A se nazává *ortogonální*, pokud $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$. Nechť A, B jsou komplexní ortogonální matice téhož rozměru splňující $\det A + \det B = 0$. Dokažte, že $\det(A + B) = 0$.

Úloha 3. (seriál) Najděte $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ pro rekurentně zadanou posloupnost $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 0, 1, 6)$,

$$a_{n+5} + 20a_{n+4} - 16a_{n+2} + a_n = 20^n \cdot 16, \quad n \geq 1.$$

Úloha 4. Nechť $m, d \in \mathbb{N}$. Buď T_m^d graf, jehož vrcholy tvoří $(d+1)$-tice nezáporných celých čísel, jejichž součet je m a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě když mají vzdálenost $\sqrt{2}$. Určete vrcholovou souvislost, barevnost a pro $m > d$ ještě hranovou barevnost grafu T_m^d.

⋆ **Úloha 5.** Nechť posloupnost konvexních spojitých funkcí f_n konverguje bodově na intervalu $[a, b]$ ke spojité funkci f. Pak konverguje stejnoměrně na $[a, b]$.

⋆ **Úloha 6.** Nechť R je okruh s jednotkou, pro který existuje $n \in \mathbb{N}$ s vlastností: pro všechna $x, y \in R$, $k \in \{n, n+1, n+2\}$, $(xy)^k = x^k y^k$. Ukažte, že R je komutativní.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`