2. soutěžní série

14. 3. 2016

Úloha 1. Je možné rozložit hyperkvádr o rozměrech $2 \times 5 \times 7 \times 12$ na (nějak natočené, až na hranici disjunktní) hyperkvádry o rozměrech $1 \times 2 \times 3 \times 4$?

Úloha 2. (seriál) Spočtěte determinant následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 2016 \\ 3 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & 0 & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. matice 2016×2016, kde na hlavní diagonále se střídají jedničky a dvojky, hned pod hlavní diagonálou jsou trojky a v posledním sloupci odzdola čísla 1 až 2016.

Úloha 3. Ukažte, že neexistuje funkce $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, která by pro všechna x, $y > 0$ splňovala $(f(x))^2 \geq f(x+y)(f(x)+y)$.

Úloha 4. V několika bedýnkách je umístěno nějaké množství kokosů a k je pevně zvolené přirozené číslo. *Přesunem* rozumíme, že zvolíme čtyři různé bedýnky b_1, b_2, b_3, b_4 a z b_1 přesuneme k kokosů do b_3 a z b_2 dalších k kokosů do b_4. Přesun ovšem můžeme provést pouze tehdy, když

- v b_1 i b_2 je každé alespoň k kokosů a
- (počet kokosů v $b_3 + b_4$) − (počet kokosů v $b_1 + b_2$) $+ 2k > 0$.

Dokažte, že při žádné počáteční konfiguraci kokosů nelze provést nekonečně mnoho přesunů.

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`