3. domácí série

4. 4. 2016

Úloha 1. Bod E leží na úhlopříčce BD čtverce $ABCD$. Dále body P, Q jsou postupně středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABE, ADE. Dokažte, že i body $APEQ$ tvoří čtverec.

Úloha 2. Dokažte, že pro každých šest po sobě jdoucích přirozených čísel existuje prvočíslo, které dělí právě jedno z těchto čísel.

Úloha 3. Najděte minimum množiny

$$M = \{|\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x| : \ x \in \mathbb{R}\},$$

kde $\sec x := \frac{1}{\sin x}$ a $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\cos x}$.

Úloha 4. Nechť G je grupa, ve které má každý komutátor (tj. prvek tvaru $aba^{-1}b^{-1}$) konečný řád. Dokažte, že prvky konečného řádu tvoří podgrupu G.

⋆ **Úloha 5. (seriál)** Buď $b \geq 2$ přirozené číslo a uvažujme rekurentně zadanou posloupnost $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ a $f(n) = nf(d)$ pro $n > 2$, kde d je počet cifer v b-adickém zápisu čísla n. Pro která b konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} \ ?$$

⋆ **Úloha 6.** Jsou dána přirozená čísla $0 < n \leq p$. Dokažte, že všechny kořeny následujícího polynomu jsou reálné:

$$P_{n,p}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j} \binom{p}{n-j} x^j$$

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`