4. soutěžní série

25. 4. 2016

Úloha 1. Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \pm 1$. Najděte všechny dvojice funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ splňující $f(\ln x + \lambda \ln y) = g(\sqrt{x}) + g(\sqrt{y})$ pro všechna $x, y > 0$.

Úloha 2. (seriál) Uvažujme posloupnost zadanou rekurentně $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ a pro $n \geq 0$ nechť platí

$$\det \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+2} & u_{n+3} \end{pmatrix} = n!.$$

Ukažte, že pro každé n je u_n celé číslo.

Úloha 3. Jsou dána přirozená čísla $m \leq n$ a tabulka $n \times n$ žárovek, přičemž všechny jsou na začátku zhasnuté. V každém kroku smíme přepnout m po sobě jdoucích žárovek v jednom řádku nebo jednom sloupci. Dokažte, že když m nedělí n, tak nelze všechny žárovky rozsvítit.

Úloha 4. Uvnitř jednotkového kruhu se středem v počátku se nachází úsečky $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Součet jejich délek je alespoň $2\sqrt{n}$. Dokažte, že lze najít kružnici se středem v počátku, která protíná alespoň dvě z těchto úseček.