5. domácí série

2. 5. 2016

Úloha 1. Nechť $n_1, n_2, \ldots, n_k$ jsou celá čísla a $m_1, m_2, \ldots, m_k$ nějaká jejich permutace. Dokažte, že

$$|n_1 - m_1| + |n_2 - m_2| + \cdots + |n_k - m_k|$$

je sudé číslo.

Úloha 2. Existuje v $\mathbb{R}^k$ $(k > 1)$ podmnožina S taková, že pro každý bod $x \in \mathbb{R}^k \setminus S$ existuje jen konečně mnoho, ale alespoň dva body S, které mají ze všech bodů v S k x nejmenší (euklidovskou) vzdálenost?

Úloha 3. Polynomy $p, q \in \mathbb{R}[x]$ splňují pro všechna $x \in \mathbb{R}$ rovnosti

$$p(p(x)) = q(q(x)),$$

$$p(p(p(x))) = q(q(q(x))).$$

Musí už nutně $p = q$?

Úloha 4. Buď A komplexní $n \times n$ matice. Dokažte, že A lze napsat jako součin dvou involucí (involuce je matice inverzní sama k sobě) právě tehdy, když je invertovatelná a podobná své inverzní matici.

Úloha 5. Uvažujme rekurentně zadanou posloupnost polynomů $P_0(x) = 1$, $P_n(x) = -2xP_{n-1}(x) + P'_{n-1}(x)$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Vypočtěte $P_n(0)$ pro každé přirozené n.

⋆ **Úloha 6.** Označme p_n n-té prvnočíslo a $[z]$ celou část čísla z. Ukažte, že následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{p_n}$$

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`