5. soutěžní série – řešení

1. Chceme vlastně ukázat, že (i) existuje nekonečně mnoho n takových, že $f(n+1) > f(n)$ a (ii) existuje nekonečně mnoho n takových, že $f(n+1) < f(n)$. Tvrzení (i) přímo plyne z toho, že

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor\right) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{n}{1} - 1 + \frac{n}{2} - 1 + \cdots + \frac{n}{n} - 1\right) = -1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Na druhou stranu, je-li p liché prvočíslo, pak

$$\left\lfloor\frac{p-1}{1}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{p}{1}\right\rfloor - 1, \quad \left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor, \quad \left\lfloor\frac{p-1}{3}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{p}{3}\right\rfloor, \quad \ldots, \quad \left\lfloor\frac{p-1}{p-1}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{p}{p-1}\right\rfloor,$$

tedy

$$f(p) - f(p-1) = \frac{p-1}{p}f(p-1) + \frac{2}{p} - f(p-1) = \frac{2}{p} - \frac{f(p-1)}{p},$$

přičemž pravá strana je záporná, kdykoliv $f(p-1) > 2$; v těchto případech tedy platí $f(p) < f(p-1)$. Z důkazu části (i) plyne, že $f(p-1) > 2$ pro všechna dost velká prvočísla.

2. Zvolíme jendnoho člověka a_1 a jakoukoli 2016-prvkovou množinu, která jej obsahuje. Tak najdeme člověka a_2 (mimo tuto 2016-prvkovou množinu), který zná a_1. Pak zvolíme libovolnou množinu obsahující a_1 i a_2 a najdeme někoho, kdo zná oba – a_3. Opět zvolíme 2016-prvkovou množinu, která obsahuje a_1, a_2, a_3, atd. Takto postupně nacházíme stále větší kliku, až nakonec najdeme kliku velikosti 2017. Pro dokončení úlohy stačí zvolit množinu lidí mimo tuto kliku – ten, kdo zná všechny z této množiny, již bude znát i všechny uvnitř kliky (protože v ní leží) a tím pádem všechny obyvatele.

3. The answer is YES, it converges. We observe that d_n is decreasing. Let us divide the inequality by $d_n > 0$, we obtain

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} \leq 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{d_n}{d_{n-1}}\right)^2.$$

We show that $\frac{d_{n+1}}{d_{n-1}} \leq \frac{3}{4}$. In fact,

$$\frac{d_{n+1}}{d_{n-1}} = \frac{d_n}{d_{n-1}} \cdot \frac{d_{n+1}}{d_n} \leq \frac{d_n}{d_{n-1}}\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{d_n}{d_{n-1}}\right)^2\right) = x\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) \quad \text{for } x = \frac{d_n}{d_{n-1}} < 1. \tag{1}$$

Differentiating the right-hand side we obtain $1 - \frac{3}{4}x^2 > 0$ for $x < 1$. So, the right-hand side of (1) is increasing on $(0,1)$ and

$$\frac{d_{n+1}}{d_{n-1}} \leq 1 \cdot (1 - \frac{1}{4} \cdot 1^2) = \frac{3}{4}.$$

Hence, the sequence of even members $(d_{2n+2})_{n=0}^{\infty}$ is dominated by $d_2(3/4)^n$, so the sum of even members converges and the same holds for the sequence and sum of odd members $(d_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ (it is dominated by $d_1(3/4)^n$, so the sum converges).

4. Uvažme polynom $\det(A+xB)$. Protože je A singulární, je jeho konstantní člen nulový. Obdobně protože je B singulární, je nulový člen u x^3. Polynom je tedy obecně tvaru $ax + bx^2$, kde a, b jsou celá čísla. Dále označme $\omega = e^{2i\pi/3}$. Pak, protože matice komutují, můžeme součet jejich třetích mocnin rozložit $A^3 + B^3 = (A+B)(A+\omega B)(A+\overline{\omega}B)$ a počítat:

$$\det(A^3+B^3) = \det(A+B)\cdot\det(A+\omega B)\cdot\det(A+\overline{\omega}B) = (a+b)(\omega a+\omega^2 b)(\overline{\omega}a+\overline{\omega}^2 b) =$$

$$\omega\overline{\omega}(a+b)(a+\omega b)(a+\overline{\omega}b) = a^3 + b^3.$$