6. domácí série

16. 5. 2016

Úloha 1. Najděte všechna komplexní čísla z, která splňují $\frac{(z+1)^2}{z^2+1} \in \mathbb{R}$.

Úloha 2. Existuje taková posloupnost kladných čísel $a_1, a_2, \ldots$, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ konverguje a $\prod_{k=1}^{n} a_k < n^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$?

Úloha 3. Buď ABC trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu C, $|AC| = 1$ a $\angle BAC = \theta$. Uvažujme bod $D \in AB$ takový, že $|AD| = 1$, bod $E \in BC$ takový, že $\angle CDE = \theta$ a bod $F \in AB$ takový, že $FE \perp BC$. Vypočtěte $\lim_{\theta \to 0+} |EF|$. ($XY$ značí úsečku XY, $|XY|$ délku této úsečky a $\angle XYZ$ velikost úhlu XYZ)

Úloha 4. (seriál) Pratrepka velká jménem 1 se začala množit. Každé trepce jménem k z jejího potomstva se narodí $k+1$ dcer, které pojmenuje $1, 2, \ldots, k+1$. Kolik bude mít pratrepka prapra…pravnuček n-té generace? (1. generace jsou dcery, 2. vnučky, …)

Úloha 5. Nechť G je konečná grupa s vlastností: Pro každé dva prvky $x, y \in G$ různé od neutrálního prvku existuje automorfismus φ grupy G takový, že $\varphi(x) = y$. Dokažte, že existuje prvočíslo p a nezáporné celé k takové, že G je isomorfní $\mathbb{Z}_p^k$.

⋆ **Úloha 6.** Na plese se setkalo $2n$ chlapců a $2n$ děvčat, přičemž někteří chlapci tančili s některými děvčaty. Pro každou dvojici děvčat platí, že počet chlapců, se kterými tančila obě děvčata, je roven n. Dokažte, že pro každou dvojici chlapců je počet děvčat, se kterými tančili oba chlapci, také roven n.