6. soutěžní série – řešení

1. Kdyby $a = b = 0$, bude $a+b$ racionalní, když je právě jedno z čísel a, b nulové, bude $a + b = (a^3 + b^3)/(a^2 + b^2)$ a tedy racionální. Dále předpokládejme, že obě čísla jsou nenulová. Pak poznamenejme, že čísla $a^2 - ab + b^2$, a^2b^2 jsou kladná, tedy rovněž nenulová. Můžeme pak počítat:

$$a^2b^2 = \frac{(a^2+b^2)^2 - (a^4+b^4)}{2} \in \mathbb{Q}, \quad (a^4+b^4) - a^2b^2 \in \mathbb{Q},$$

$$a^6 + b^6 = (a^2+b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) \in \mathbb{Q}, \quad a^3b^3 = \frac{(a^3+b^3)^2 - (a^6+b^6)}{2} \in \mathbb{Q},$$

$$ab = \frac{a^3b^3}{a^2b^2} \in \mathbb{Q}, \quad a + b = \frac{a^3+b^3}{(a^2+b^2) - ab} \in \mathbb{Q}.$$

2. Všimněme si nejprve, že jelikož $a \notin \{0, \pm 1\}$, mají dvojčleny $(a^{2k}x^2 + 1)$ a $(a^{2\ell}x^2+1)$ různé (komplexní) kořeny pro $k \neq \ell$. Z toho důvodu dostáváme, že $P(x) = (a^2x^2 + 1)Q_1(x)$ pro nějaký reálný polynom Q_1. Odtud $P(ax) = (a^4x^2 + 1)Q_1(ax)$, což po dosazení dává

$$(a^2x^2+1)(a^4x^2+1)Q_1(ax) = (a^2x^2+1)(a^{2n}x^2+1)Q_1(x),$$

odkud zase $Q_1(x) = (a^4x^2 + 1)Q_2(x)$ pro nějaký reálný polynom Q_2. Induktivně tak dostaneme

$$P(x) = (a^2x^2+1)(a^4x^2+1)\cdots(a^{2n-2}x^2+1)Q_{n-1}(x).$$

Po dosazení do rovnosti ze zadání pak máme $Q_{n-1}(ax) = Q_{n-1}(x)$, tudíž Q_{n-1} je konstantní polynom. Závěrem tedy je, že

$$P(x) = c(a^2x^2+1)(a^4x^2+1)\cdots(a^{2n-2}x^2+1)$$

pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

3. Buď $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ dány; dokážeme, že množina M všech $y \in X$ dosažitelných z x způsobem popsaným v zadání je obojetná, ze souvislosti prostoru tedy musí jít o celý prostor. M je otevřená: Je-li $y \in M$, posloupnost $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ pro to „svědčí“ a $\varrho(z, y) < \varepsilon$, pak posloupnost $x_0, x_1, \ldots, x_n, z$ „svědčí“ pro $z \in M$. M je uzavřená: Je-li $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků M konvergující k $z \in X$, pak pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ nutně platí $\varrho(y_n, z) < \varepsilon$ a $z \in M$ pak plyne z již provedené úvahy.

4. Ukážeme $|f(j) - f(j+1)| = 1$, z bijektivnosti pak plyne kýžený požadavek. Pro $k = 2$ je toto splněno automaticky, předpokládejme dále $k > 2$. Uvažme $k+1$ po sobě jdoucích čísel $i, i+1, \ldots i+k$, nechť m a M jsou postupně nejmenší a největší prvek množiny $M_i = f(i), \ldots f(i+k)$. Pak $M - m \leq k+1$. Protože je funkce bijektivní, musí být i množina těchto hodnot množinou po sobě jdoucích čísel. Nyní zvolme $j = i+k-1$ a sestrojme množinu M_j. I ta je množinou po sobě jdoucích čísel, tedy i jejich průnik $M_i \cap M_j = \{f(j), f(j+1)\}$ musí být množinou po sobě jdoucích čísel. To nám dává kýžené $|f(j) - f(j+1)| = 1$.