1. soutěžní série – řešení

1. Uvažujme polynom $q(x) = p(x) - 4$. Tento polynom má kořeny a, b, c, d, tedy jej lze vyjádřit jako

$$q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)r(x).$$

Polynom r je výsledkem dělení polynomu q s celočíselnými koeficienty monickým polynomem $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ s celočíselnými koeficienty, a proto má r také celočíselné koeficienty. Pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$ je $q(k)$ součinem pěti celých čísel $k-a$, $k-b$, $k-c$, $k-d$, $r(k)$, z nichž první čtyři jsou navzájem různá. Pokud by ale platilo $q(k) = 5$, pak by nutně prvočíslo 5 muselo být dělitelné součinem čtyř různých celých čísel, což není možné.

2. Nechť c_n značí počet permutací na $\{1, \ldots, 2n\}$ s cyklem délky větší než n; spočteme, kolik to je. Nechť k je délka (jediného) cyklu delšího než n, pak prvky tohoto cyklus lze vybrat $\binom{2n}{k}$ způsoby a seřadit v cyklu $(k-1)!$ způsoby. Zbývajících $2n - k$ prvků můžeme libovolně permutovat, což dává $(2n-k)!$ možností. Celkem tedy máme

$$c_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k}(k-1)!(2n-k)! = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k},$$

tedy pro pravděpodobnost q_n, že permutace *obsahuje* cyklus délky $> n$, platí

$$q_n = \frac{c_n}{(2n)!} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \qquad (q_0 = 0.)$$

Je (i pro $n = 0$) $q_{n+1} - q_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$, takže máme $q_n = q_n - q_0 = (q_n - q_{n-1}) + (q_{n-1} - q_{n-2}) + \cdots + (q_1 - q_0) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Konečně tedy $\lim_{n\to\infty} q_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$ a $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}(1 - q_n) = 1 - \log 2$.

3. Dokážeme sporem, že f musí být stejnoměrně spojitá. Uvědomme si, že

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| < c \tag{1}$$

nám dává odhad $f(x+h) - f(x) > f(x) - f(x-h) - c$, iterováním této nerovnosti pak máme $f(x+kh) - f(x+(k-1)h) > f(x) - f(x-h) - kc$ (snadno indukcí) a sečtením těchto nerovnosti pro $k = 1, \ldots, N$

$$f(x+Nh) - f(x) > N(f(x+h) - f(x)) - c\frac{N(N+1)}{2}, \tag{2}$$

což pro N velké a c hodně malé říká, že $f(x+Nh)$ je o hodně větší než $f(x)$, a to bude spor s omezeností.

Nyní přesněji: Nechť $|f(x)| \le K$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že existují posloupnosti x_n, y_n, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $f(y_n) - f(x_n) \ge \varepsilon$. Volme pevné n tak velké, aby pro všechna $h < \frac{1}{n}$ platilo (1) s konstantou $c = \frac{\varepsilon^2}{16K}$. Vezmeme-li $x = x_n$, $h = y_n - x_n$ a $N \in \left(\frac{3K}{\varepsilon}, \frac{4K}{\varepsilon} - 1\right)$, pak (2) nám dává

$$f(x_n + Nh) - f(x_n) > N\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{16K}\frac{N(N+1)}{2} > 3K - \frac{\varepsilon^2}{16K}\frac{16K^2}{2\varepsilon^2} = \frac{5}{2}K,$$

což je spor s $|f(x)| \le K$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

4. Polynomy P a $x^2 + y^2 - 1$ můžeme chápat jako polynom jedné proměnné x nad okruhem polynomů $\mathbb{R}[y]$ a provést dělení se zbytkem prvního druhým. Zbytek musí mít v x nižší stupeň než dělitel, máme tedy

$$P(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)Q(x, y) + xf(y) + g(y)$$

pro nějaké $f, g \in \mathbb{R}[y]$. Dle zadání máme pro x, y splňující $x^2 + y^2 = 1$ levou stranu nulovou, takže pro ně platí $xf(y) = -g(y)$. Umocněním na druhou a úpravou dostaneme

$$(1-y)(1+y)f^2(y) = g^2(y), \tag{$\star$}$$

a protože hodnot y je nekonečně mnoho, shodují se strany $(\star)$ jakožto prky $\mathbb{R}[y]$. To je ale spor, jelikož ireducibilní polynom $1+y$ se na pravé straně vyskytuje v sudé mocnině, zatímco na levé straně je v liché mocnině.