1. soutěžní série

20. 2. 2017

Úloha 1. Nechť p je polynom s celočíselnými koeficienty a nechť existují čtyři různá celá čísla a, b, c, d taková, že $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 4$. Ukažte, že neexistuje celé číslo k, pro které by platilo $p(k) = 9$.
(5 bodů)

Úloha 2. Označme p_n pravděpodobnost, že náhodně vybraná (při rovnoměrném rozdělení) permutace π na $\{1, 2, \dots, 2n\}$ neobsahuje cyklus delší než n. Spočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$. (10 bodů)

Úloha 3. Je každá spojitá omezená funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$\lim_{h\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = 0$$

stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$? Připomeňme, že f je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R} :\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
(10 bodů)

Úloha 4. Nechť P je reálný polynom dvou proměnných takový, že $P(\sin\alpha, \cos\alpha) = 0$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$. Musí už nutně být P dělitelný polynomem $x^2 + y^2 - 1$ (tj. $P(x, y) = Q(x, y)(x^2 + y^2 - 1)$ pro nějaký reálný polynom dvou proměnných Q)? (10 bodů)

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`