3. soutěžní série

20. 3. 2017

Úloha 1. Ukažte, že čísla ve tvaru

$$\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)^n$$

jsou celá a nesoudělná s trojkou pro všechna $n \in \mathbb{N}$. (5 bodů)

Úloha 2. Máme 2017 závaží s různými hmotnostmi, můžeme si z nich vybírat libovolné dvojice a porovnávat je na rovnoramenných vahách. Ukažte, že k nalezení tří nejtěžších a určení jejich pořadí stačí 2036 vážení. (10 bodů)

Úloha 3. Nechť $p(x)$ je reálný polynom, který je nezáporný pro všechna reálná x. Dokažte, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ existují polynomy $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ takové, že

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} (p_i(x))^2 \,.$$

(10 bodů)

Úloha 4. Mějme posloupnost reálných funkcí $f_n \in C^1([0,1])$, $n = 1, 2, \ldots$, které splňují

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{a} \qquad |f_n'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \ \text{ pro každé } x \in (0,1].$$

Ukažte, že z posloupnosti (f_n) lze vybrat podposloupnost, která konverguje stejnoměrně na $[0,1]$. (15 bodů)

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`