1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 5. 3. 2018.

Úloha 1. Spočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ pro

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

Úloha 2. Najděte největší možnou hodnotu součinu po dvou různých přirozených čísel, jejichž součet je 2018.

Úloha 3. Najděte všechny spojité funkce $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ splňující

$$\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f(a)}{f(b)}\geq\frac{f(c)}{f(d)}$$

pro všechna $a,b,c,d\in(0,+\infty)$.

Úloha 4. Existuje nekonečná množina regulárních symetrických matic $\mathcal{M}$ taková, že pro všechny $A,B\in\mathcal{M}$, $A\neq B$ platí $AB^2=B^2A$, ale $AB\neq BA$?

Úloha 5. Nechť S je množina n bodů v rovině a žádné čtyři z nich neleží na stejné přímce. Nechť $\{d_1,d_2,\dots,d_k\}$ je množina všech vzdáleností mezi dvojicemi různých bodů z S a nechť m_i značí násobnost d_i (tj. počet neuspořádaných dvojic $(A,B)\in S^2$ splňujících $|AB|=d_i$). Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^2 \leq n^3-n^2.$$

⋆ **Úloha 6.** Označme poslední nenulovou číslici $n!$ jako $f(n)$. Dokažte, že pro navzájem různá $a_i\geq 0$ závisí $f(5^{a_1}+5^{a_2}+\dots+5^{a_r})$ jen na $a_1+\dots+a_r=a$. Označme tuto hodnotu $g(a)$. Je g periodická? Pokud ano, jakou má nejkratší periodu?

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`