3. soutěžní série – řešení

1. Protože $\min(f'(x), g'(x)) \geq f(x)g(x) \geq 0$, jsou funkce f a g neklesající a limity $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = B$ existují a jsou nezáporné. Kdyby byly obě kladné, pak $f'(x) \geq f(x)g(x) \geq AB > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což vede ke sporu (např. $f(0) - A = \int_{-\infty}^0 f' \geq \int_{-\infty}^0 AB = +\infty$).

2. Pro symetrické matice $A \in S_n$ platí $\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$, takže $V \cap S_n = \{0\}$ a $\dim V + \dim S_n = \dim V + \frac{n^2+n}{2} \leq n^2$, neboli nutně musí platit $\dim V \leq \frac{n^2-n}{2}$. Prostor horních trojúhelníkových matic s nulovou diagonálou má dimenzi právě $\frac{n^2-n}{2}$ a matice i jejich součiny mají nulovou diagonálu.

3. Všimněme si, že $-(mt - ns) = (s-m)t - (t-n)s$, tedy ke každému kladnému sčítanci $mt - ns$ existuje právě jeden záporný se stejnou absolutní hodnotou. Máme tedy

$$\sum_{m=1}^{s-1} \sum_{n=1}^{t-1} |mt - ns| = 2 \sum_{m=1}^{s-1} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{mt}{s} \rfloor} (mt - ns).$$

Vnitřní sumu sečteme a dostaneme $mt\lfloor \frac{mt}{s} \rfloor - \frac{1}{2}s\lfloor \frac{mt}{s} \rfloor(\lfloor \frac{mt}{s} \rfloor + 1)$. Napišme nyní $mt = a_m s + b_m$, $a_m \in \mathbb{Z}$, $b_m \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_m \leq s-1$. Pak $\lfloor \frac{mt}{s} \rfloor = a_m = \frac{mt-b_m}{s}$ a původní dvojitá suma je rovna

$$2\sum_{m=1}^{s-1} mta_m - \frac{1}{2}sa_m(a_m+1) = 2\sum_{m=1}^{s-1} \frac{(mt)^2}{s} - \frac{mt}{s}b_m - \frac{1}{2}(mt - b_m)\frac{mt - b_m + s}{s}$$

$$= \sum_{m=1}^{s-1} \frac{(mt)^2}{s} - mt - \frac{b_m^2}{s} + b_m = \frac{t^2}{6}(s-1)(2s-1) - \frac{t}{2}s(s-1) + \sum_{m=1}^{s-1} b_m - \frac{b_m^2}{s}.$$

Protože pro nesoudělná čísla nabývají zbytky b_m každé hodnoty právě jednou, máme výsledek

$$\frac{t^2}{6}(s-1)(2s-1) - \frac{st}{2}(s-1) + \frac{s}{2}(s-1) - \frac{1}{6}(s-1)(2s-1) = \frac{1}{6}(s-1)(t-1)(2st-s-t-1).$$

4. Platí $\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{\sqrt{a+b}}$, takže po označení $T_1 = \sum_{cyc} \sqrt{(a+b)(b+c)}(a+b+c)$, $T_2 = 6(ab+bc+ca)$ stačí ukázat $T_1 \geq T_2$. Pro $x = \sqrt{a+b}$, $y = \sqrt{b+c}$, $z = \sqrt{c+a}$ navíc platí $x^2 + y^2 > z^2$ a $ab + bc + ca = \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{4} - \frac{x^4+y^4+z^4}{2}$. Potom

$$\begin{aligned}
4(T_1 - T_2) &= 2(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2) - 6(x^2+y^2+z^2)^2 + 12(x^4+y^4+z^4) \\
&= \sum 2xy(x-y)^2 - z^2(x-y)^2 + 3(x^2-y^2)^2 \\
&= \sum (x-y)^2(3x^2+3y^2+8xy-z^2) \\
&\geq \sum (x-y)^2(2x^2+2y^2+8xy) \geq 0.
\end{aligned}$$