4. soutěžní série – řešení

1. Ano. Bod s nejmenší x-ovou souřadnicí (v případě nejednoznačnosti ten z nich s nejnižší y-ovou souřadnicí) označme P, bod s nejvyšší x-ovou (resp. nejnižší y-ovou) souřadnicí označme Q. P spojíme s Q cestou po dolní straně konvexního obalu všech bodů. Zbylé body seřadíme sestupně podle jejich x-ové souřadnice a v tomto pořadí spojíme Q s P. Tato cesta neprotne sama sebe (klesá x-ová souřadnice) a ani dolní stranu konvexního obalu všech bodů.

2. Rozkladu $n = a_1 + \cdots + a_m$ odpovídá posloupnost

$$b_0,\ b_1 = a_1,\ b_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ b_{m-1} = a_1 + \cdots + a_{m-1},\ b_m = n.$$

Každé k objevující se v nějakém rozkladu odpovídá sousední dvojici lišící se o k. Pro pevné c spočteme počet posloupností, ve kterých sousedí c a $c+k$. Pro $c = 0$ posloupnost obsahuje $0, k, n$ a libovolná čísla z $\{k+1, \ldots, n-1\}$, což lze vybrat 2^{n-k-1} způsoby. Obdobně lze zdůvodnit, že pro $c = n-k$ máme 2^{n-k-1} rozkladů a pro $c = 1, \ldots, n-k-1$ máme 2^{n-k-2} rozkladů. Celkově se k v rozkladech n objeví $2 \cdot 2^{n-k-1} + (n-k-1) \cdot 2^{n-k-2} = (n-k+3)2^{n-k-2}$-krát.

3. Nechť pro spor existují $n, p, q \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda_n = \frac{p}{q}$. Protože $2 < \lambda_n \leq \lambda_1 = e$, je nutně $q \geq 2$. Následující celé číslo by pak muselo splňovat

$$\lambda_n (q!)^n = pq^{n-1}(q-1)!^n = A + \frac{1}{(q+1)^n} + \frac{1}{(q+1)^n(q+2)^n} + \cdots$$
$$< A + \frac{1}{(q+1)^n} + \frac{1}{(q+1)^{2n}} + \cdots = A + \frac{1}{(q+1)^n - 1} < A + 1,$$

tudíž by $\frac{1}{(q+1)^n} + \frac{1}{(q+1)^n(q+2)^n} + \cdots$ nebylo celé číslo, spor.

4. Lemma: Pokud a, $b \in G$ jsou nenulové a navzájem kolmé, pak nutně $(a*a) \times b = 0$ a potažmo $a * a = 0$.

důkaz: Máme totiž $a \times b \neq 0$, tj. $c = a \times b = a * b$ a podobně $0 \neq a \times c = a * c =: d$. Kdyby $(a*a) \times b \neq 0$, pak $(a*a) \times b = (a*a)*b = a*(a*b) = a*c = d$ a vidíme, že d je kolmé na a, b i c, tj. $d = 0$, spor. Aplikujeme-li nyní první část lemmatu na vektory a, $a \times b$ (ten je také kolmý na a), dostaneme $(a*a) \times (a \times b) = 0$, tj. $(a*a)$ je rovnoběžný s b a zároveň s $a \times b$, tj. $a * a = 0$.

Předpokládejme nyní pro spor, že $a \times b \neq 0$ pro nějaká a, $b \in G$. Pak $a \times b = a * b = c \in G$, c je kolmý na b, tedy $b * c = b \times c = d \neq 0$ a b, c, d jsou po dvou kolmé vektory ležící v G. Z lemmatu plyne, že $b * b = 0 = c * c = d * d$.

Nyní ukážeme, že jednotka v $(G, *)$ je nulový vektor. Označme jednotku e. Všimněme si nejprve, že pokud a, $b \in G$ komutují, pak $a \times b = 0$. Kdyby totiž $a \times b \neq 0$, pak $a * b = a \times b = -b \times a \neq b \times a = b * a$. Protože e komutuje s b i c, máme $0 = e \times b = e \times c$ a tedy $e = 0$.

Celkem tedy máme $e = 0 = b*b = c*c = d*d = (b*c)*(b*c)$. Aplikujeme-li nyní b zleva a c zprava, asociativita dává $b*c = c*b$, tj. komutují, tj. $b*c = 0$, spor.