

5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 7. 5. 2018.

Úloha 1. Nechť binární operace $*$ na množině S splňuje

i) $a * a = a$ pro všechna $a \in S$,

ii) $(a * b) * c = (b * c) * a$ pro všechna $a, b, c \in S$.

Ukažte, že $*$ je asociativní a komutativní.

Úloha 2. Kolik přirozených čísel $n < 10^{2018}$ splňuje $10^{2018} | n^2 - n$?

Úloha 3. Nechť v_0 je nulový vektor a nechť $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ jsou vektory, pro které je Euklidovská norma $|v_i - v_j|$ racionální pro všechna $0 \leq i, j \leq n + 1$. Ukažte, že v_1, \dots, v_{n+1} jsou lineárně závislé nad racionálními čísly.

Úloha 4. Kolik permutací $(2n + 2)$ -prvkové množiny lze napsat jako složení $2n$ (ale ne méně) transpozic. Výsledek zapište pomocí harmonických čísel $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

★ **Úloha 5.** Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ splňující

$$f(x^3 + y^3 + z^3) = f^3(x) + f^3(y) + f^3(z)$$

pro všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

★ **Úloha 6.** Buď f klesající funkce splňující na $(0, +\infty)$

$$f(x)e^{-f(x)} = xe^{-x}$$

(nakreslete si graf funkce xe^{-x} a vodorovnou přímku, která protíná graf ve dvou bodech - je-li jeden z průsečíků x , pak druhý průsečík je $f(x)$). Ukažte, že

$$\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{6}} f(x)^{\frac{1}{6}} dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$