5. soutěžní série – řešení

1. Pro $x, y \geq 2$ je levá strana lichá a pravá sudá. BÚNO tedy $x = 1$, což dává rovnici $2(1 + y!) = (1 + y)!$. Jistě $y = 1$ není řešení, $y = 2$ je řešení a pro $y \geq 3$ nenastá rovnost modulo 3. Jediná řešení jsou tedy $(1, 2)$, $(2, 1)$.

2. Označíme-li α_i úhel mezi úsečkami PA_i a PA_{i+1}, máme

$$2S = \sum_{i=1}^{n} |PA_i||PA_{i+1}| \sin \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} |PA_i||PA_{i+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 = 2S$$

(druhá nerovnost plyne z $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$). Obě nerovnosti jsou tedy rovnosti, tj. všechny úhly α_i jsou pravé a úsečky jsou stejně dlouhé, jedná se tedy o čtverec.

3. Uvědomme si, že na množině $\{k^2, k^2 + 1, \ldots, (k + 1)^2 - 1\}$ (k libovolné) je posloupnost $\{\sqrt{n}\}$ rostoucí a pro $n = (k + 1)^2 - 1$ nabývá hodnoty $M(k)$, která splňuje

$$1 - M(k) = 1 - \{\sqrt{(k + 1)^2 - 1}\} = k + 1 - \sqrt{(k + 1)^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{(k + 1)^2 - 1} + k + 1},$$

tj. čím větší k, tím větší $M(k)$. Odtud plyne, že $\max_{1 \leq n \leq N}\{\sqrt{n}\}$ je větší z čísel $\{\sqrt{N}\}$ a $\{\sqrt{k^2 - 1}\}$, kde k splňuje $k^2 - 1 \leq N < (k + 1)^2 - 1$. Ukážeme, že pro velká N je $\{\sqrt{k^2 - 1}\}$ vždy větší nebo rovno $\{\sqrt{N}\}$. Pro $N = k^2 - 1$ a $N = k^2$ je nerovnost zřejmá, pro ostatní N platí

$$1 - \{\sqrt{N}\} = k + 1 - \sqrt{N} = \frac{(k + 1)^2 - N}{k + 1 + \sqrt{N}} \geq \frac{2}{k + 1 + \sqrt{N}} \geq \frac{2}{k + 1 + \sqrt{(k + 1)^2}},$$

a to je pro velká k (tj. velká N) větší než

$$\frac{1}{k + \sqrt{k^2 - 1}} = 1 - \{\sqrt{k^2 - 1}\}.$$

Nyní máme (pišme dále $k(N)$ namísto k)

$$\lim_{N \to \infty} \sqrt{N} \left(1 - \max_{1 \leq n \leq N}\{\sqrt{n}\}\right) = \lim_{N \to \infty} \frac{\sqrt{N}}{k(N) + \sqrt{k(N)^2 - 1}} = \frac{1}{2},$$

neboť $k(N)^2 - 1 \leq N < (k(N) + 1)^2 - 1$.

4. Pro $k \in \mathbb{Z}$ uvažujme $n \times n$ matice $A_k = B_k C B_{-k}$, kde

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ze vztahů $B_{-k} = B_k^{-1}$ a $C^n = I_n$ plyne $A_k^n = (B_k C B_k^{-1})^n = B_k C^n B_k^{-1} = I_n$. Rozmyslete si, že pro různá k jsou matice A_k navzájem odlišné.