

## 5. soutěžní série

30. 4. 2018

**Úloha 1.** Najděte všechna řešení rovnice

$$(1 + x!)(1 + y!) = (x + y)!$$

(5 bodů)

**Úloha 2.** Najděte všechny konvexní mnohoúhelníky  $A_1 A_2 \dots A_n$  s následující vlastností: Uvnitř mnohoúhelníku existuje bod  $P$ , pro který

$$\sum_{i=1}^n |PA_i|^2 = 2S.$$

Zde  $S$  značí obsah mnohoúhelníka a  $|AB|$  délku úsečky  $AB$ .

(10 bodů)

**Úloha 3.** Spočtěte limitu

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left( 1 - \max_{1 \leq n \leq N} \{\sqrt{n}\} \right),$$

kde  $\{x\}$  značí desetinnou část  $x$ .

(10 bodů)

**Úloha 4.** Najděte všechna  $n \in \mathbb{N}$ , pro která existuje nekonečně mnoho  $n \times n$  matic s celočíselnými prvky splňujících  $A^n = I$ .

(15 bodů)