6. soutěžní série

14. 5. 2018

Úloha 1. V okruhu R každý prvek $a \in R$ splňuje $a^2 = 0$. Ukažte, že pro všechny trojice $a, b, c \in R$ platí $abc + abc = 0$. (5 bodů)

Úloha 2. Mějme trojúhelník ABC s úhly α, β, γ splňující $\max\{\alpha, \beta\} = \gamma + 30°$. Pak ABC je pravoúhlý, právě když $\frac{R}{r} = \sqrt{3} + 1$. Dokažte. ($r$ a R značí po řadě poloměry kružnice vepsané a opsané trojúhelníku ABC.) (10 bodů)

Úloha 3. Sečtěte řadu

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 j + 2ij + ij^2}.$$

(10 bodů)

Úloha 4. Nechť k, n jsou přirozená čísla, $k \leq \frac{n}{2}$, a S je takový systém $k \times k$ podmatic nějaké $n \times n$ matice, že každé dvě podmatice z S se protínají. Ukažte, že S má nejvýše $\binom{n-1}{k-1}^2$ prvků. (15 bodů)