1. soutěžní série

25. 2. 2019

Úloha 1. Všechny čtyři vrcholy čtyřstěnu mají stejný součet délek tří hran z onoho vrcholu vycházejících. Ukažte, že pro každý vrchol délky těchto tří hran tvoří trojúhelník.

Úloha 2. Rozhodněte, pro která $n \geq 5$ je možné vydlaždičkovat čtverec pomocí n ne nutně stejně velkých obdélníků, jejichž jedna strana je dvakrát delší než ta druhá.

Úloha 3. Buď $f(n) = n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ a m přirozené číslo. Definujme posloupnost $a_0 = m$ a $a_{n+1} = f(a_n)$. Ukažte, že posloupnost obsahuje čtverec přirozeného čísla.

Úloha 4. Množina $\{x_n \in (0,1) : n = 1,2,3,\dots\}$ je hustá v $(0,1)$, x_n jsou navzájem různé. Body $x_1, \dots, x_{n-1}$ dělí $(0,1)$ na n intervalů, bod x_n leží v jednom z nich. Označme a_n, b_n vzdálenosti x_n od krajních bodů tohoto intervalu. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n (a_n + b_n) = \frac{1}{3}$.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`