2. soutěžní série

13. 3. 2019

Úloha 1. Ukažte, že $65 \nmid 2^n - 3$ pro všechna přirozená n. (5 bodů)

Úloha 2. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má rovnice $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ právě jedno kladné řešení r_n. Spočtěte $\lim_{n\to\infty} r_n$. (10 bodů)

Úloha 3. Nechť $a, b > 0$ jsou iracionální čísla splňující $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Ukažte, že každé přirozené číslo je obsažené v právě jedné z posloupností $a_n = [an]$ a $b_n = [bn]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, a to právě jednou. (10 bodů)

Úloha 4. Buď A konečný okruh a $a \in A$. Definujme l_a, $r_a : A \longrightarrow A$, $l_a(x) = ax$, $r_a(x) = xa$.

a) Dokažte, že má-li A jednotku (tzn. prvek e splňující pro každé $x \in A$ identitu $ex = xe = x$), pak l_a je prosté, právě když r_a je prosté.

b) Najděte příklad okruhu A a jeho prvku b, pro který l_b je prosté a r_b nikoli, nebo naopak l_b není prosté, ale r_b je.

(15 bodů)